Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 1 (Familiarisation avec la fonction de répartition)

Soit X une variable à densité de fonction de répartition F, et de support réel. Exprimer les probabilités suivantes grâce à la fonction de répartition F.

Indication :

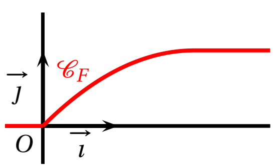
- Pour cet exercice, on se souviendra que, pour une variable aléatoire réelle X à densité, la probabilité $\mathrm{P}(X=x)=0$, ce qui nous permet de ne pas avoir besoin de faire attention au caractère strict ou large des inégalités.
- En revanche, si l'on opère une transformation sur X qui créée une variable aléatoire discrète, il faudra être beaucoup plus vigilant (dans le cas de la partie entière notamment).
- Dans certaines questions, il faudra discuter selon la valeur du paramètre.

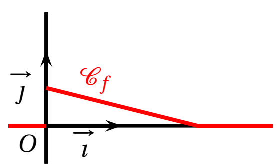
Réponses brutes :

1. $\mathrm{P}(X \leq 4)=F(4)$
2. $\mathrm{P}(X>t)=1-F(t)$
3. $\mathrm{P}(X \geq -2)=1-F(-2)$
4. $\mathrm{P}(-3 \leq X<7)=F(7)-F(-3)$
5. $\mathrm{P}(-x^2<X<1-x)=F(1-x)-F(-x^2)$ (car $x^2-x+1>0$)
6. $\mathrm{P}\big(X \in\,]-2, x^2-1]\big)=F(x^2-1)-F(-2)$
7. $\mathrm{P}\big(X \in\,]-\infty ; 2]\big)=F(2)$
8. $\mathrm{P}\big(X \in [-t ;+\infty[\big)=1-F(-t)$
9. $\mathrm{P}\big(X \in\,]-\infty ; t] \cup [t+3 ;+\infty[\big)=1-F(t+3)+F(t)$
10. $\mathrm{P}(Y<7)=\mathrm{P}(5X+2<7)=\mathrm{P}(5X<5)=\mathrm{P}(X<1)=\mathrm{P}(X \leq 1)=F(1)$ $\quad(Y=5X+2)$
11. $\mathrm{P}(Y>5)=\mathrm{P}(1-2X>5)=\mathrm{P}(-2X>4)=\mathrm{P}(X<-2)=\mathrm{P}(X \leq -2)=F(-2)$ $\quad(Y=1-2X)$

Exercice 2 (Trouver une fonction densité à partir d'une fonction de répartition)

1. On que F vérifie les quatre poins indiqués dans la caractérisation du cours : continue partout et C^1 sauf en 0 et en 1, croissante, de limite nulle en $-\infty$ et de limite égale à 1 en $+\infty$ (facile ici).
   Pour trouver f, on dérive F partout où elle est de classe C^1 et on comble avec ce que l'on veut sur les quelques éventuels points d'irrégularité de la dérivée de F. Réponses brute : f est définie sur $[0, a]$ par $f(x)=\frac{2(a-x)}{a^2}$, **et nulle ailleurs** (bien penser à le mentionner). On peut vérifier par acquis de conscience qu'elle vérifie les trois critères pour être une fonction densité (mais c'est automiquement le cas puisqu'on l'a trouvée à partir d'une fonction de répartition).





2. $\mathrm{E}(X)=\frac{a}{3}$
3. $\mathrm{E}(X^2)=\frac{a^2}{6}$ et $\mathrm{V}(X)=\frac{a^2}{18}$

Exercice 3 (Montrer qu'une fonction est une fonction de répartition d'une variable à densité)

La méthode consiste à vérifier que la fonction proposée est bien continue partout et C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points, et à vérifier qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}$ et que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et 1.

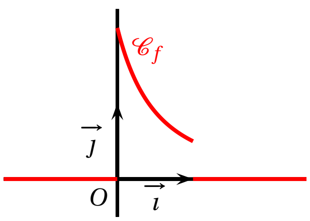
1. F est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, car sur $\mathbb{R}^+$, elle est construite à partir de fonctions usuelles et elle est constante sur $\mathbb{R}_-^*$.
   Elle est donc continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}^+$.
   En 0, $\lim_{x \to 0^+} F(x)=1-1=F(0)=0=\lim_{x \to 0^-} F(x)$ donc F est continue en 0, et par suite sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   De plus, sur $\mathbb{R}^+$, $F'(x)=2xe^{-x^2}>0$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et par suite sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est constante sur $\mathbb{R}_-^*$.
   De plus, les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et 1.
   Donc F est bien une fonction de répartition.
2. g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ saut peut-être en 0 et 1, car g est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, g est la fonction constante égale à 1 sur $]1;+\infty[$ et g est la fonction cube sur $]0,1]$.
   Donc en particulier, g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, $]0,1]$ et $]1;+\infty[$.
   Or en 0, $\lim_{x \to 0^+} g(x)=0^3=0=\lim_{x \to 0^-} g(x)$ donc g est continue en 0.
   Et en 1, $\lim_{x \to 1^-} g(x)=1^3=1=\lim_{x \to 1^+} g(x)$ donc g est continue en 1.
   Donc g est bien continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   De plus, il est évident que g est croissante sur $\mathbb{R}$ (la fonction cube l'étant sur $[0,1]$) et que les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et 1.
   Donc R est une variable à densité de fonction de répartition g.

Exercice 4 (Trouver une densité à partir d'une fonction de répartition)

Il suffit de dériver g partout où elle est dérivable et de lui attribuer une valeur quelconque là où elle ne l'est pas. On peut prendre par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Exercice 5 (Exercice incontournable à savoir faire)

1. ① f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_-^*$, $]0,1[$ et $]1;+\infty[$ car elle est constante sur les deux intervalles non bornés et sur $[0,1]$, elle est construite à partir de fonctions usuelles. Donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en deux points de $\mathbb{R}$.
② f est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ dès lors que c est positif.
③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge puisque son étude revient à l'étude d'une intégrale sur un segment, f étant identiquement nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et $]1;+\infty[$, et donc d'intégrale nulle sur ces intervalles.
Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{c}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{c}{1+x}\right]_0^1 = c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}$.
Pour être une densité, il faut que cette intégrale soit égale à 1. Il vient donc que $c = 2$.



2. Pour tout x réel, la fonction de répartition F de la variable aléatoire X de densité f est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-2}{1+t}\right]_0^x = 2 - \frac{2}{1+x} = \frac{2x}{1+x} & \text{si } x \in [0,1] \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. • X admet une espérance si l'intégrale suivante est absolument convergente : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$.
Mais f étant à valeurs entières et X ayant un support borné et à valeurs positives, il s'agit d'un simple calcul d'intégrale sur un segment : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2x+2}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$. par linéarité de l'intégration et par simplification par $(1+x)$
La deuxième intégrale ayant déjà été calculée en première question, finalement, $\mathrm{E}(X) = [2\ln(1+x)]_0^1 - 1 = 2\ln 2 - 1$

• Calcul du moment d'ordre 2, qui existe pour les mêmes raisons que l'espérance : $\mathrm{E}(X^2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.
Ne connaissant pas de primitive manifeste de cette fonction, on décortique de la même manière que dans le calcul de l'espérance dans le but de simplifier le calcul intégral et faire apparaître des expressions faciles à intégrer (constantes et fonctions du type $\frac{u'}{u}$ ou $\frac{u'}{u^2}$) :

$$\frac{2x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x^2}{x^2+2x+1} = \frac{2x^2+4x+2-(4x+4)+2}{x^2+2x+1} = \frac{2x^2+4x+2}{x^2+2x+1} - \frac{4(x+1)}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^2} = 2 - 4\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(1+x)^2}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 \frac{2x^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = 2 - 4\big[\ln(1+x)\big]_0^1 + 1 = 3 - 4\ln 2$$

• Et par suite, par la formule de Koenig-Huygens, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 3 - 4\ln 2 - (2\ln 2 - 1)^2 = -4\ln^2 2 + 3\ln 2 + 2$

Exercice 6 (exercice du même type)

f vérifie les trois points habituels. (pour le troisième point, le calcul revient à $2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ en tant qu'intégrale d'une fonction paire sur un segment centré en 0)

La fonction F de répartition de X de densité f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1-x^2}{2} & \text{si } x \in [-1,0] \\ \frac{1+x^2}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Le calcul de l'espérance revient à faire l'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction impaire, elle est donc nulle. $\mathrm{E}(X) = 0$
(Une observation du graphe de la fonction densité rendait ce résultat prévisible)
Le moment d'ordre 2 revient aussi à un calcul d'une intégrale sur un segment centré en 0 d'une fonction paire et vaut $\frac{1}{2}$. C'est aussi la valeur de la variance puisque l'espérance est nulle. Donc $\mathrm{V}(X) = \frac{1}{2}$.

Exercice 7 (idem)

f vérifie les trois points habituels. (pour le troisième point, le calcul revient à $2 \times \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ en tant qu'intégrale d'une fonction paire sur $\mathbb{R}$)

La fonction de répartition F de la variable X est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\mathrm{E}(X) = 0$ $\quad\mathrm{E}(X^2) = 2\quad$ et $\quad\mathrm{V}(X) = 2$.
(Cet exercice présente les mêmes particularités de parité que le précédent pour les calculs d'espérance et de variance). On pourra se rapporter avec profit aux résultats démontrés dans le cours et se rapportant à la loi exponentielle de paramètre 1 (fil conducteur du premier paragraphe).

Exercice 8 (Idem avec en plus l'espérance et la variance de l'inverse d'une loi)

1. $\forall n \geq 2$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)^2}$ (IPP et croissances comparées)

2. Les trois points habituels sont vérifiés (le dernier grâce à la question précédente avec $n=4$).
3. En utilisant la première question avec $n=3$, on trouve $\text{E}(X)=\frac{9}{4}$ et avec $n=2$ on trouve $\text{E}(X^2)=9$ puis $\text{V}(X)=\frac{63}{16}$ (avec K-H).
4. L'énoncé insistant sur le fait que l'on ne cherche pas à connaître une densité de Y. On est donc dans un cas d'emploi manifeste du théorème de transfert.
La fonction $x\mapsto xf(x)$ est définie et continue sur $[1;+\infty[$. De plus, on a $\frac{1}{x}f(x)=9\times\frac{\ln x}{x^5}$ et d'après la question 1, $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{9}{16}$.
f étant identiquement nulle sur $]-\infty;1]$, on en déduit que $\text{E}(Y)=\frac{9}{16}$.
On obtient facilement de la même manière le moment d'ordre 2 et donc la variance, par application de la formule de Koenig-Huygens : $\text{E}(X^2)=\frac{9}{25}\quad \text{V}(X)=\frac{279}{6400}$.

Exercice 10 (Loi de max)

X et Y ont toutes les deux pour fonction de répartition la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$.

Pour tout x réel, le max S de deux valeurs X et Y est inférieur à un nombre x si les deux valeurs sont simultanément inférieures à x.
d'où, pour tout x réel, $\mathrm{P}(S\le x)=\mathrm{P}\big(xX\le x)\cap(Y\le x)\big)$.
X et Y étant indépendantes, $\mathrm{P}(S\le x)=\mathrm{P}(X\le x)\mathrm{P}(Y\le x)$.

Donc pour $\mathrm{P}(S\le x)=\big(F(x)\big)^2=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$.

En appelant F_S cette fonction, on vérifie facilement que F_S est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 saut peut-être en 0 et en 1. (il se trouve qu'elle est même C^1 en 0 mais peu importe, cela n'a aucune utilité et fait perdre du temps pour rien).
Donc F_S est la fonction de répartition d'une variable à densité dont la fonction densité peut être obtenue facilement en dérivant F_S partout où elle est de classe C^1 et en attribuant des points d'office ailleurs.

Par exemple, la fonction f_s définie sur $\mathbb{R}$ par $f_S(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 2x & \text{si } x\in[0,1]\\ 0 & \text{si } x>1\end{cases}$ est une densité de S.

Exercice d'annales

Exercice 11 (d'après Ecricome)

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre 1, lorsqu'elle admet pour fonction densité la fonction f_X définie par $\quad f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{si } x\ge 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.
Elle admet alors pour espérance : $\text{E}(X)=1$ et pour variance $\text{V}(X)=1$
2. ▶ f est positive sur $\mathbb{R}$.
   ▶ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 (POSFU sur $\mathbb{R}_+^*$ et en tant que constante sur $\mathbb{R}_-^*$). En fait elle est continue en 0 mais peu importe on ne perd pas de temps à le montrer.
   ▶ On cherche à prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.
   Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x=\text{E}(X)=1$.
   ↪ Par suite, f est bien une densité de probabilité.

   ▶ • Comme f est nulle sur $]-\infty,0[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
   • Soit $A>0$, et posons $u'(x)=e^{-x}$, $u(x)=-e^{-x}$, $v(x)=x^2$, $v'(x)=2x$; alors, par intégration par parties (les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,A]$), on a

$$\begin{aligned}\int_0^A xf(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^A x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=[-x^2e^{-x}]_0^A+2\int_0^A xe^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=\underbrace{-A^2e^{-A}}_{\to 0\text{ (c.c.)}}+2\underbrace{\int_0^A xe^{-x}\,\mathrm{d}x}_{\to 1\text{(déjà calculée)}}\ \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\ 2\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 2.

- Par suite, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc T admet une espérance et $\mathrm{E}(T) = 2$.
- Le temps moyen de passage en caisse vaut donc $\boxed{\text{deux unités de temps.}}$

3. **a.** ▶ Si $x < 0$, alors $F_T(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

▶ Si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
F_T(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \int_0^x te^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{\text{I.P.P.}}{=} \left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \\
&= 1 - (x+1)e^{-x}.
\end{aligned}$$

▶ D'où $\boxed{F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.}$

b. Écrivons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{(T>1)}(T<2) &= \tfrac{\mathrm{P}\big((T>1)\cap(T<2)\big)}{\mathrm{P}(T>1)} \\
&= \tfrac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\
&= \tfrac{-3e^{-2} + 2e^{-1}}{2e^{-1}} \\
&= \tfrac{2e-3}{2e}
\end{aligned}$$

4. **a.** $M = \min(T_A, T_B)$.

b. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F_M(t) &= \mathrm{P}(M \leq t) \\
&= 1 - \mathrm{P}(M > t) \\
&= 1 - \mathrm{P}(\min(T_A, T_B) > t) \\
&= 1 - \mathrm{P}\big((T_A > t) \cap (T_B > t)\big) && \text{car le min est supérieur à } t \text{ lorsque les deux var sont sup à } t \text{ simult}^t \\
&= 1 - \mathrm{P}(T_A > t)\cdot\mathrm{P}(T_B > t) && \text{car } T_A \text{ et } T_B \text{ sont indépendantes} \\
&= 1 - (1 - F_T(t))(1 - F_T(t)) \\
&= 1 - (1 - F_T(t))^2 \\
&= \begin{cases} 1 - (1-0)^2 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (1 - (1 - (t+1)e^{-t}))^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (t+1)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (t+1)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

c. *On sait déjà que M est une variable aléatoire réelle, il suffit donc de vérifier le caractère « à densité ». F_M étant une fonction de répartition, de M, il suffit de vérifier sa régularité.*

▶ F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 donc, comme $F_M(t) = 1 - (1 - F_T(t))^2$, c'est aussi le cas de F_M.

▶ M est donc bien une variable à densité et une densité de M est f_M définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2\,t\,(t+1)e^{-2t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$