Fonctions de deux variables

1. Exercices simples pour commencer

Exercice 1 (Extrema globaux)

1. Montrer que $h(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas de maximum global.
2. Montrer que $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas de maximum global.
3. Après avoir développé $4\left(x+\frac{y}{2}-1\right)^2 + (y+1)^2$, conclure quand aux extrema globaux de $g(x,y) = -4x^2 - 2y^2 - 4xy + 8x + 2y$ sur $\mathbb{R}^2$.

(on pourra se référer au NOTA BENE de l'ex 5)

Exercice 2 (Étude complète simple)

Faire l'étude des extrema (locaux et globaux) de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$ (se référer à la méthode de l'ex6)

2. Exercices d'entrainement

Exercice 3 (Justification de la classe $\mathscr{C}^2$)

Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur l'ensemble U donné, justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U :

1. $f(x,y) = -2x^4x^3y - 2x^2y^2 + 5xy^3 + y^4, \quad U = \mathbb{R}^2$
2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xye^{x^2+y^2}, \quad U = \mathbb{R}^2$
3. $f(x,y) = \ln(x+y) - \ln(x-y), \quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -x < y < x\}$
4. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad U = \mathscr{B}(O,2)$

VOST :

↪ Pour les fonctions polynômiales ou rationnelles, pas de soucis, une rédaction minimale suffit.

↪ Pour les fonctions composées $\quad \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, on se rappelle du résultat suivant :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } g \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur un domaine } \mathscr{D} \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ à valeurs dans un intervalle } I \text{ de } \mathbb{R} \\ \text{et si } h \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } I\end{array}\right\} \text{alors par composition } h\circ g \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathscr{D}$$

Exercice 4 (Trouver un gradient ou une matrice hessienne)

Dans chacun des cas suivants, déterminer le gradient et la matrice hessienne de la fonction f au point (x_0, y_0) :

1. $f(x,y) = x + y + xye^{x+y}, \quad (x_0,y_0) = (1,-1)$
2. $f(x,y) = x^2y + 4xy^3 - 2y + 5x^2 + 3, \quad (x_0,y_0) = (0,-1)$
3. $f(x,y) = \sqrt{xy^2+1} \quad (x_0,y_0) = (2,-2)$ (on fera l'étude sur $\mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}$)

VOST :

① On commence par justifier l'existence des dérivées partielles en justifiant le caractère $\mathscr{C}^2$ (qui implique l'existence (et même la continuité) de toutes les dérivées partielles d'ordre 1 et 2).

② On fait les calculs de toutes les dérivées partielles au point (x,y) (en évoquant le théorème de Schwarz pour s'éviter un calcul inutile (que l'on peut tout de même faire au brouillon afin de vérifier que l'on a pas fait d'erreur de calcul)).

③ On remplit la matrice colonne du gradient et la matrice carrée en calculant directement les valeurs au point (x_0,y_0) demandé.

Exercice 5 (Trouver les extrema d'une fonction à deux variables)

Faire l'étude des extrema des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3 \quad$ sur $\mathbb{R}^2$
2. $g(x,y) = \ln(xy) + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2y + \frac{x^2}{2} \quad$ sur $\left(R_-^*\right)^2 \cup \left(R_+^*\right)^2$
3. $h(x,y) = e^{x^2+y^2} - ey^2 \quad$ sur $\mathbb{R}^2$ (extrema locaux uniquement)
4. $k(x,y) = 3 - x^2 + 2xy^2 - 2y^4 + 2y^2 \quad$ sur $[0;1]^2 \quad$ ← ⚠fermé !

VOST :

Le plan d'étude est toujours le même :

① On justifie de l'appartenance à la classe $\mathscr{C}^2$ de la fonction.

② On calcule les dérivées partielles

③ On cherche les points critiques sur un ouvert en résolvant le système $\begin{cases}\partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0\end{cases}$

④ On calcule les dérivées partielles secondes

⑤ On détermine le spectre de la matrice hessienne en chaque point critique pour en déduire la nature des points critiques en regardant le signe des valeurs propres

⑥ Si la fonction présente un extremum local en un point critique, on cherche si cet extremum est global

NB : Quand on s'intéresse à des problématiques d'extrema globaux (ou de majoration), il peut-être intéressant de s'intéresser à des limites de fonctions d'**une** variable si on a l'intuition que l'extremum n'est PAS global. On peut chercher à fixer et particulariser y et étudier la limite de $f(x,y)$ quand x tend vers l'infini (ou fixer x et étudier la limite de $f(x,y)$ quand y tend vers l'infini), ou encore prendre le cas particulier $y = x$ (et étudier la limite en $\pm\infty$). Si la limite trouvée est infinie, f ne peut pas être majorée (ou minorée selon le signe de l'infini), et donc ne peut pas avoir de maximum (ou minimum).

(un raisonnement similaire vaut pour des problèmes de minima, de minoration avec une limite égale à $-\infty$)

Exercice 6 (Représenter une ligne de niveau)

Par définition, la ligne de niveau k d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y)$ soit bien défini et vérifie $f(x, y) = k$.

1. Représenter la ligne de niveau -1 pour la fonction F définie par $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 1$
2. Représenter la ligne de niveau 1 pour la fonction G définie par $F(x, y) = x^2 y^2$

VOST :

Pour représenter une telle ligne de niveau, si l'on ne reconnaît pas un cas particulier évident (par exemple un cercle en utilisant des formes canoniques comme dans le **1.**), on se ramène au tracé des courbes représentatives des fonctions réelles en essayant d'exprimer y en fonction de x (ou le contraire) dans l'équation $f(x, y) = k$ (comme dans le **2.**).

Exercice 7 (Une autre méthode à connaître quand on veut prouver qu'un extremum local est global)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f ne peut admettre d'extremum qu'en $A(-1, 0)$.
3. Prouver qu'effectivement f présente un extremum local en A et préciser sa nature et sa valeur.
4. **a.** Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \geq xe^x$

   b. En étudiant la fonction $g : x \mapsto xe^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 3 est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

VOST : Les trois première questions suivent la démarche classique exposée dans l'ex 4.

4. **a.** Pour montrer la globalité du minimum local, il peut être comme ici intéressant de fixer x (mais pas de le particulariser) et d'étudier la fonction $f_x = y \mapsto f(x, y)$ comme une fonction à paramètre. On peut alors déterminer son minimum, qui sera indépendant de y mais en revanche dépendant du "paramètre" x (ici on trouvera que ce fameux minimum vaut xe^x, et on retiendra pour quel y il est atteint).

   b. Il ne reste plus alors qu'à étudier la fonction g et de trouver son minimum (on retiendra en quelle valeur de x il est atteint)

NB : • Cette méthode est évidemment adaptable à la recherche de maxima globaux.

• On peut aussi être amené à fixer d'abord y, et de chercher la valeur du minimum de la fonction en x, qui dépendra de y, puis de chercher le minimum de cette fonction en y ainsi mise en évidence.

• Attention cependant à ne pas s'acharner sur cette méthode, qui n'est pas toujours la panacée et qui peut aboutir à des calculs insurmontables. Dans ce cas, on essaye un autre méthode.

• Dans certains cas, une méthode simple peut consister à exprimer $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ comme somme de carrés pour montrer qu'elle est toujours positive (dans le cas d'un minimum) ou somme combinaison linéaire de carrés avec coefficients négative pour montrer qu'elle est toujours négative (dans le cas d'un maximum). C'est ce qui a été fait dans le 2. du dernier exercice du cours.

3. Sujets d'annales

Exercice 8 (Ecricome 2006 ex 1 partie 1)

On considère la fonction f définie par $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1 + 2e^x$

ainsi que la fonction g de deux variables réelles définie par $\qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^x \cdot (x + y^2 + e^x)$.

1. Étudier les variations de f et donner ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2, -1]$, tel que $f(\alpha) = 0$. (rappel : $e \simeq 2{,}7$.)
3. Déterminer le seul point critique de g, c'est-à-dire le seul élément de $\mathbb{R}^2$ en lequel g est susceptible de présenter un extremum.
4. Vérifier que g présente un extremum local en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?
5. On note β la valeur de g en son extremum local. Montrer que $4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$.

Exercice 9 (EDHEC 2006 ex 3)

Soit f la fonction définie pour tout couple $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $f(x; y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. **a.** Calculer les dérivées partielles premières de f.

   b. En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.
2. **a.** Calculer les dérivées partielles secondes de f.

   b. Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
3. **a.** Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.

   b. En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction g définie pour tout couple $(x; y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $g(x; y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$.

   a. Utiliser la question 3. pour établir que $\quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x; y) \geq -1/6$.

   b. En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 10 (EML2013 exercice 1 partie IV)

On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie, pour tout $t\in\mathbb{R}$ par $f(t)=\begin{cases} -t\ln t+t^{1/3} & \text{si } 0<t<1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

On note D l'ensemble des couples (x,y) appartenant à $]0;+\infty[^2$ tels que $x+y<1$ et $2x<1$.

On considère l'application $G:D\to\mathbb{R}$, de classe C^2 sur l'ouvert D, définie, pour tout $(x,y)\in D$, par $G(x,y)=f(x+y)-\frac{1}{2}f(2x)$.

1. Représenter l'ensemble D.
2. Calculer, pour tout $(x,y)\in D$, les dérivées partielles premières de G en (x,y), en fonction de x,y,f'.
3. Soit $(x,y)\in D$. Montrer que (x,y) est un point critique de G si et seulement si : $f'(2x)=0$ et $f'(x+y)=0$.
4. En déduire que G admet un unique point critique, $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)$, avec α unique solution de $f'(t)=0$ sur $]0;1[$.
5. Est-ce que G admet un extremum local ?