Fonctions de deux variables - Éléments de correction

1. Exercices simples pour commencer

Exercice 1 (Extrema globaux)

1. Montrer que $h(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas de maximum global.

- Montrons que 0 est un minimum global pour h sur $\mathbb{R}^2$:

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\geq 0$ donc $1+x^2+y^2\geq 1$, d'où $h(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)\geq \ln(1)=0$ par croissance du logarithme népérien.

$\boxed{\text{0 est bien minimum de } h \text{ et il est atteint en l'origine}}$ car $h(0,0)=0$ et c'est la seule solution de l'équation $\ln(1+x^2+y^2)=0$

- Montrons que h n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$:

$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x,0)=\ln(1+x^2)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ par opérations sur les limites. Donc $\boxed{h \text{ n'admet par de maximum sur } \mathbb{R}^2.}$

2. Montrer que $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ mais n'admet pas de maximum global.

- Montrons que 0 est un minimum global pour f sur $\mathbb{R}^2$:

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x-y)^2\geq 0$

de plus, $f(x,y)=0 \iff (x-y)^2=0 \iff x-y=0 \iff x=y$

donc $\boxed{\text{0 est bien un minimum pour } f\text{, atteint en tous les points de la droite d'équation } y=x.}$

- Montrons que f n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$:

$\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x,0)=x^2\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ donc $\boxed{f \text{ n'admet pas de maximum sur } \mathbb{R}^2.}$

3. Après avoir développé $4\left(x+\frac{y}{2}-1\right)^2+(y+1)^2$, conclure quand aux extrema globaux de $g(x,y)=-4x^2-2y^2-4xy+8x+2y$ sur $\mathbb{R}^2$.

- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 4\left(x+\frac{y}{2}-1\right)^2+(y+1)^2=4\left(x^2+\frac{y^2}{4}+1+xy-2x-y\right)+y^2+2y+1=4x^2+2y^2+4xy-8x-2y+5$

donc $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x,y)=-4\left(x+\frac{y}{2}-1\right)^2-(y+1)^2+5$ càd $g(x,y)-5=-4\left(x+\frac{y}{2}-1\right)^2-(y+1)^2\leq 0$

De plus, $g(x,y)=5 \iff -4\left(x+\frac{y}{2}-1\right)^2-(y+1)^2=0 \iff \begin{cases}x+\frac{y}{2}-1=0\\ y+1=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=-1\end{cases}$

Donc $\boxed{g \text{ admet un maximum de 5 en le point de coordonnées } \left(\tfrac{3}{2};-1\right).}$

- Montrons que g n'admet pas de minimum global sur $\mathbb{R}^2$:

$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x,0)=-4x^2+8x\underset{x\to+\infty}{\sim}-4x^2\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$ donc $\boxed{g \text{ n'admet pas de minimum global sur } \mathbb{R}^2.}$

Exercice 2 (Étude complète simple)

Faire l'étude des extrema (locaux et globaux) de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^2+xy-y^2$

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale, elle y admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 :

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad \partial_1 f(x,y)=2x+y \qquad \partial^2_{1,1}(x,y)=2 \qquad \partial^2_{2,1}(x,y)=1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \partial_2 f(x,y)=x-2y \qquad \partial^2_{2,1}(x,y)=1 \qquad \partial^2_{2,2}(x,y)=-2$

- Les seuls endroits susceptibles d'être des extrema locaux sur l'**ouvert** $\mathbb{R}^2$ sont les point critiques, obtenus en résolvant le système :

$\begin{cases}\partial_1 f(x,y)=0\\ \partial_2 f(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}2x+y=0\\ x-2y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ $\boxed{\text{Le seul point critique est l'origine.}}$

- Vérifions maintenant la nature de ce point critique sur l'**ouvert** $\mathbb{R}^2$ en calculant sa matrice hessienne, et en s'intéressant au signe de ses valeurs propres : $\nabla^2 f(0,0)=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&-2\end{smallmatrix}\right)$. Notons A cette matrice.

$\lambda\in \mathrm{Sp}(A) \iff A-\lambda I$ non inversible $\iff \det(A-\lambda I)=0 \iff (2-\lambda)(-2-\lambda)-1=0 \iff \lambda^2-4-1=0 \iff \lambda=\pm\sqrt{5}$

Les deux valeurs propres, non nulles, étant de signe contraire, on en déduit que le point $\boxed{(0,0) \text{ est un point col.}}$

- Pour le fun parce que ce n'est pas nécessaire ici, on peut vérifier que l'on a pas d'extrema globaux comme si on n'avait pas fait l'étude précedente :

$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x,0)=x^2\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty \qquad\qquad \forall y\in\mathbb{R},\quad f(0,y)=-y^2\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$

Donc $\boxed{f \text{ n'admet ni maximum ni minimum sur } \mathbb{R}^2.}$

Mais comme un extremum global est nécessairement un extremum local et qu'il n'y en avait pas d'après l'étude précédente, on avait déjà le résultat.

2. Exercices d'entrainement

Exercice 3 (Justification de la classe $\mathscr{C}^2$)

Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur l'ensemble U donné, justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U :

1. f est polynomiale donc elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. ① $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est une fonction polynomiale et elle est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   ② la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc par composition, $(x,y)\mapsto e^{x^2+y^2}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   ③ $(x,y)\mapsto xy$ est une fonction polynomiale et elle est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   ④ par produit (② et ③), la fonction $(x,y)\mapsto xye^{x^2+y^2}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   ⑤ Par somme, (① et ④), f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. $(x,y)\mapsto x-y$ et $(x,y)\mapsto x+y$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonctions polynomiales.
   La fonction logarithme népérien est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$
   Par composition, $(x,y)\mapsto \ln(x+y)$ et $(x,y)\mapsto \ln(x-y)$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
   Par combinaison linéaire, f est de classe Cc^2 sur U.
4. $(x,y)\mapsto 4-x^2-y^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale.
   La fonction racine carrée est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Donc par composition, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Exercice 4 (Trouver un gradient ou une matrice hessienne)

Dans chacun des cas suivants, déterminer le gradient et la matrice hessienne de la fonction f au point (x_0,y_0) :

1. $f(x,y)=x+y+xye^{x+y}, \quad (x_0,y_0)=(0,0)$
   f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations sur les fonction usuelles. Les dérivées partielles existent donc et on pourra utiliser le théorème de Schwartz. Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on a :

   $\partial_1 f(x,y)=1+y(1+x)e^{x+y}$ $\quad$ $\partial^2_{1,1} f(x,y)=y(2+x)e^{x+y}$ $\quad$ $\partial^2_{1,2} f(x,y)=\partial^2_{2,1} f(x,y)$ (thm de Schwarz)
   $\partial_2 f(x,y)=1+x(1+y)e^{x+y}$ $\quad$ $\partial^2_{2,1} f(x,y)=(1+x)(1+y)e^{x+y}$ $\quad$ $\partial^2_{2,2} f(x,y)=x(2+y)e^{x+y}$

   On en déduit $\nabla f(1,-1)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\nabla^2 f(1,-1)=\begin{pmatrix}-3&0\\0&1\end{pmatrix}$
2. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale. Les dérivées partielles existent donc et on pourra utiliser le théorème de Schwarz. Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on a :

   $\partial_1 f(x,y)=2xy+4y^3+10x$ $\quad$ $\partial^2_{1,1} f(x,y)=2y+10$ $\quad$ $\partial^2_{1,2} f(x,y)=\partial^2_{2,1} f(x,y)$ (thm de Schwarz)
   $\partial_2 f(x,y)=x^2+12xy^2-2$ $\quad$ $\partial^2_{2,1} f(x,y)=2x+12y^2$ $\quad$ $\partial^2_{2,2} f(x,y)=24xy$

   On en déduit $\nabla f(0,-1)=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\nabla^2 f(0,-1)=\begin{pmatrix}8&12\\12&0\end{pmatrix}$
3. f est de classe $\mathscr{C}^2$ par opérations sur les fonctions usuelles car $xy^2+1>0$ sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$. Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ on a :

   $\partial_1 f(x,y)=\frac{1}{2}y^2(xy^2+1)^{-1/2}$ $\quad$ $\partial^2_{1,1} f(x,y)=-\frac{1}{4}y^4(xy^2+1)^{-3/2}$ $\quad$ $\partial^2_{1,2} f(x,y)=\partial^2_{2,1} f(x,y)$ (thm de Schwarz)
   $\partial_2 f(x,y)=xy(xy^2+1)^{-1/2}$ $\quad$ $\partial^2_{2,1} f(x,y)=y\left(\frac{1}{2}xy^2+1\right)(xy^2+1)^{-3/2}$ $\quad$ $\partial^2_{2,2} f(x,y)=x(xy^2+1)^{-3/2}$

   On en déduit $\nabla f(2,-2)=\begin{pmatrix}2/3\\-4/3\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\nabla^2 f(2,-2)=\begin{pmatrix}-4/27&-10/27\\-10/27&2/27\end{pmatrix}$

Exercice 5 (Trouver les extrema d'une fonction à deux variables)

1. $f(x,y)=3xy-x^3-y^3 \quad$ sur $\mathbb{R}^2$
   • f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
   $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \qquad \partial_1 f(x,y)=3y-3x^2 \qquad\qquad \partial_2 f(x,y)=3x-3y^2$
   • Recherche des points critiques :
   Un point $M(x,y)$ de l'**ouvert** $\mathbb{R}^2$ est un point critique si et seulement si :

$$\begin{cases}\partial_1 f(x,y)=0\\ \partial_2 f(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y-3x^2=0\\3x-3y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-x^2=0\\x-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y-x)-(x^2-y^2)=0 & L_1\leftarrow L_1-L_2\\x-y^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y-x)(1+x+y)=0\\x-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x \text{ ou } y=-x-1\\x-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\x-x^2=0\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}y=x-1\\x-(-x-1)^2=0\end{cases}$$

   Le premier système donne comme solutions les points $(0,0)$ et $(1,1)$ et le deuxième ne donne aucune solution.

On obtient donc comme points critiques les points $(0,0)$ et $(1,1)$.
• Puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut calculer les dérivées partielles secondes en tout point de $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles secondes de f sont : $\partial^2_{1,1}f(x,y) = -6x$ $\quad \partial^2_{2,1}f(x,y) = \partial^2_{1,2}f(x,y) = 3$ (thm de Schwartz car f $\mathscr{C}^2$) $\quad \partial^2_{2,2}f(x,y) = -6y$

• On cherche les valeurs propres de la matrice hessienne de f en $(0,0)$: Or $\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de cette matrice sont les réels λ pour lesquels la matrice $\begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible, c'est à dire lorsque son déterminant est nul. On trouve $\lambda = 3$ ou $\lambda = -3$.
Ces deux valeurs propres, non nulles, sont de signes contraires donc $(0,0)$ est un point col.

• La matrice Hessienne de f en $(1,1)$ est $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.
Les valeurs propres de cette matrice étant -9 et -3, toutes deux de signe strictement négatif, f admet donc un maximum local en $(1,1)$ de valeur $f(1,1) = 1$.
• Le maximum local est-il global ?
Il n'est pas global car $f(0,y) = -y^3$ qui tend vers $+\infty$ en $-\infty$ c'est à dire qu'il existe un réel y tel que $f(0,y) > f(1,1)$. Par exemple, $f(0,-2) = 8 > 1$.

2. $g(x,y) = \ln(xy) + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2y + \frac{x^2}{2}$ sur $\left(R_-^*\right)^2 \cup \left(R_+^*\right)^2$
Réponses brutes sans rédaction : $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 1/x + \sqrt{2}xy + x \\ 1/y + \sqrt{2}/2x^2 \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} -1/x^2 + \sqrt{2}y + 1 & \sqrt{2}x \\ \sqrt{2}x & -1/y^2 \end{pmatrix}$
Le seul point critique sur l'ouvert $\left(R_-^*\right)^2 \cup \left(R_+^*\right)^2$ est le point de coordonnées $(-1, -\sqrt{2})$.
Matrice hessienne correspondante : $A = \nabla^2 g(-1,-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix}$.
Or $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 5/2\lambda - 1$ Le produit des racines de ce trinôme du second degré étant -1 (rappel de cours, il vaut c/a), on en déduit que les deux racines, non nulles, sont de signes opposés, et que le point $(-1,-\sqrt{2})$ est un point col.
Dans certains cas comme ici, il est inutile de calculer les valeurs propres, puisque seul leur signe importe, la relation coefficients/racines permet donc d'avoir une réponse rapide, et sera valorisée comme méthode élégante et preuve de bonne connaissance du cours !
Puisque l'on travaille sur un ouvert, il n'y a donc pas d'extremum pour cette fonction.

3. h est de classe $\mathscr{C}^2$ par opérations sur les fonctions usuelles. OU rédaction plus développée ci-après :
$(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est une fonction polynomiale et c'est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc par composition, $(x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
$(x,y) \mapsto -ey^2$ est une fonction polynomiale et c'est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Par somme, h est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Réponses brutes :
$(0,0)$ est un point col (valeurs propres de sa matrice hessienne 2 et 2-2e, de signe opposé)
$(0,1)$ et $(0,-1)$ sont des points en lesquels h admet un minimum local (2e et 4e pour valeurs propres de la matrice hessienne commune, toutes deux strictement positives) et ce minimum local vaut $h(0,1) = h(0,-1) = 1 - e$.

4. $k(x,y) = 3 - x^2 + 2xy^2 - 2y^4 + 2y^2$ sur $[0;1]^2$ $\leftarrow$ ⚠**fermé!**
• $\mathscr{D} = [0,1]^2$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. h étant de classe $\mathscr{C}^2$ et donc continue sur $\mathscr{D}$ (en tant que fonction polynomiale), k est bornée et atteint ses bornes. Donc il existe un maximum global et un minimum global.

• On fait l'étude sur les frontières de $\mathscr{D}$, on trouvera en $(1,1)$ que 4 est un maximum et en $(1,0)$, 2 est un minimum :
∘ Quand (x,y) appartient au segment $\{0\} \times [0;1]$ de $\mathbb{R}^2$, $f(0,y) = 3 - 2y^4 + 2y^2$, qui est un trinôme du second degré en y^2 ayant sur ce segment un maximum (car son coefficient dominant est négatif) qui vaut 7/2 quand $y^2 = \frac{1}{2}$ et un minimum qui vaut 3 en $y^2 = 0$ et $y^2 = 1$.
Donc sur ce segment, le minimum de k de 3 est atteint en $(0,0)$ et en $(0,1)$, et le maximum de 7/2 est atteint en $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
∘ Quand (x,y) appartient au segment $[0;1] \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$, $f(x,0) = 3 - x^2$, qui est un trinôme du second degré en x ayant sur ce segment pour maximum 3 atteint en $x = 0$ et pour minimum 2 atteint en $x = 1$
Donc sur ce segment, le minimum de k de 2 est atteint en $(1,0)$ et le maximum de 3 est atteint en $(0,0)$.
∘ Quand (x,y) appartient au segment $\{1\} \times [0;1]$ de $\mathbb{R}^2$, $f(1,y) = 3 - 1 + 2y^2 - 2y^4 + 2y^2 = -2y^4 + 4y^2 + 2$, qui est un trinôme du second degré en y^2 qui admet un maximum de 4 pour $y^2 = 1$ et un minimum de 2 pour $y^2 = 0$ Donc sur ce segment, le minimum de k de 2 est atteint en $(1,0)$ et le maximum de 4 est atteint en $(1,1)$.
∘ Quand (x,y) appartient au segment $[0;1] \times \{1\}$ de $\mathbb{R}^2$, $f(x,0) = 3 - x^2 + 2x - 2 + 2 = -x^2 + 2x + 3$, qui est un trinôme du second degré en x ayant sur ce segment pour maximum 4 atteint en $x = 1$ et pour minimum 3 atteint en $x = 0$
Donc sur ce segment, le minimum de k de 3 est atteint en $(0,1)$ et le maximum de 4 est atteint en $(1,1)$.

• D'autre part, en faisant l'étude (classique), de recherche des points critiques à l'intérieur du domaine $\mathscr{D}$, qui est ouvert, on trouve qu'il n'y a aucun point critique sur $]0;1[^2$, et donc que les maximum et minimum trouvés sur les "bords" sont les seuls et sont donc des extrema globaux.

Exercice 6 (Représenter une ligne de niveau)

Par définition, la ligne de niveau k d'une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y)$ soit bien défini et vérifie $f(x,y)=k$.

1. Il s'agit de trouver l'ensemble des points $M(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $F(x,y)=-1$:
   Or $F(x,y)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2-4x-1=-1 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)^2-4+y^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)^2+y^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad OM^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad OM=2$
   $\boxed{\text{la ligne de niveau -1 pour la fonction } F \text{ est le cercle de centre } \Omega(2,0) \text{ et de rayon 2.}}$
2. On cherche l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $x^2y^2=1 \;\Leftrightarrow\; xy=1$ ou $xy=-1$.
   Il est clair que x et y sont non nuls, sinon leur produit serait nul et ne pourrait être égal à 1 ou -1.
   On reconnaît alors l'équation de deux hyperboles d'équation $y=\frac{1}{x}$ et $y=-\frac{1}{x}$.
   $\boxed{\text{La ligne de niveau 1 pour la fonction } G \text{ est donc la réunion des deux hyperboles d'équation } y=\frac{1}{x} \text{ et } y=-\frac{1}{x}.}$

Exercice 7 (Une méthode à connaître quand on veut prouver qu'un extremum local est global)

1. Rédaction identique à ce que l'on a fait dans l'ex 3.
2. En gros, on demande de montrer que sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, le seul point critique trouvé est le point de coordonnées $(-1,0)$.
   Pour cela, puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$, elle admet des dérivées partielles selon les deux variables, et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
   $\partial_1 f(x,y)=(1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)}$
   $\partial_2 f(x,y)=2x^2ye^{x(y^2+1)}$
   Et sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, f ne peut admettre d'extrema qu'en un point annulant le gradient. Soit à résoudre :
   $\begin{cases}\partial_1 f(x,y)=0\\ \partial_2 f(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)}=0\\ 2x^2ye^{x(y^2+1)}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+x(y^2+1)=0\\ 2x^2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1=0\\ x=0\end{cases}$ ou $\Leftrightarrow \begin{cases}1+x=0\\ y=0\end{cases}$
   Ce qui permet de conclure que f ne peut admettre d'extremum local qu'en A.
3. f étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (et donc le théorème de Schwarz étant applicable), pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a :
   $\partial^2_{1,1}f(x,y)=(y^2+1)\big(2+x(y^2+1)\big)e^{x(y^2+1)}$ $\quad\partial^2_{2,1}f(x,y)=\partial^2_{1,2}f(x,y)=2xy\big(2+x(y^2+1)\big)e^{x(y^2+1)}$ $\quad\partial^2_{1,1}f(x,y)=2x^2(2xy^2+1)e^{x(y^2+1)}$
   $\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix}e^{-1} & 0\\ 0 & 2e^{-1}\end{pmatrix}$
   Le spectre de cette matrice diagonale étant manifestement constitué de valeurs propres strictement positives, on en conclut que $A(-1,0)$ est un minimum local pour f sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ de valeur $f(-1,0)=-\frac{1}{e}$
4. **a.** On pourrait montrer le résultat de cette question en procédant par manipulations successives d'inégalités mais c'est un peu périlleux et peut être sources d'erreurs. Nous allons donc procéder par étude de fonction paramétrique.
   Soit x un nombre fixé dans $\mathbb{R}$. La fonction $f_x:y\mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall y\in\mathbb{R},\ f_x'(y)=\partial_2 f(x,y)=2x^2ye^{x(y^2+1)}$.
   Ainsi, $f_x'(y)$ est du signe de x^2y sur $\mathbb{R}$ et, si $x\neq 0$,

y	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_x'(y)$		$-$	0	$+$	
f_x		$\searrow$	xe^x	$\nearrow$	

   On a donc, si $x\neq0$: $\forall y\in\mathbb{R},\quad f(x,y)\geq xe^x$
   ce qui nous permet de conclure, le cas $x=0$ rejoignant le cas général, (il y a alors égalité) :
   $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)\geq xe^x$$

   b. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x réel, $g'(x)=(x+1)e^x$
   d'où :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	

   En particulier, on en déduit que, pour tout x réel, $g(x)\geq -e^{-1}$
   d'où, avec le résultat de la question précédente : $\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ f(x,y)\geq -e^{-1}$.
   Comme $f(-1,0)=-e^{-1}$, le minimum local trouvé dans la question 3 est donc le minimum global de f.

3. Sujets d'annales

Exercice 8 (Ecricome 2006 ex 1 partie 1)

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ et
   $$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=1+2e^x>0.$$

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et elle tend vers l'infini en $\pm\infty$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$, donc il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.
De plus, $f(-2) = -1 + 2e^{-2} < 0$ et $f(-1) = 2e^{-1} > 0$, donc $\boxed{\alpha \in [-2, -1].}$

3. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_1 g(x, y) = e^x(x + y^2 + 2e^x + 1)$$

$$\text{et } \partial_2 g(x, y) = 2ye^x$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où} \nabla g(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 g(x, y) = 0 \\ \partial_2 g(x, y) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} e^x(x + y^2 + 2e^x + 1) = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases} \\
&\underset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 1 + 2e^x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Le seul point critique de g est donc $\boxed{(\alpha, 0).}$

4. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
&\partial^2_{1,1} g(x, y) = e^x(x + y^2 + 4e^x + 2), \\
&\partial^2_{2,2} g(x, y) = 2e^x \\
\text{et } &\partial^2_{2,1} g(x, y) = \partial^2_{1,2} g(x, y) = 2ye^x.
\end{aligned}$$

$$\text{En particulier,} \nabla^2 g(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} e^\alpha(\alpha + 4e^\alpha + 2) & 0 \\ 0 & 2e^\alpha \end{pmatrix}$$

donc la matrice hessienne de g en $(\alpha, 0)$ est diagonale, donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale ; comme celles-ci sont par ailleurs clairement strictement positives, on en déduit que g admet un $\boxed{\text{minimum local}}$ en $(\alpha, 0)$. De plus, $\beta = g(\alpha, 0) = e^\alpha(\alpha + e^\alpha)$.

5. Calculons :

$$\begin{aligned}
4\beta &= 4e^\alpha(\alpha + e^\alpha) \\
&= 2e^\alpha(2\alpha + 2e^\alpha) \\
&= (-\alpha - 1)(\alpha - 1) \quad (\text{car } f(\alpha) = 0 \Rightarrow 2e^\alpha = -\alpha - 1) \\
&= 1 - \alpha^2,
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à dire que $\boxed{4\beta + \alpha^2 - 1 = 0.}$

Exercice 9 (EDHEC 2006 ex 3)

1. **a.** f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 2y - 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y + 2x - 1.$$

b.

$$\begin{aligned}
\text{Sur l'ouvert } \mathbb{R}^2,\ (x, y) \text{ point critique } &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0 \\ 6y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/6 \\ y = 1/6 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le seul point critique de f est donc bien $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2. **a.** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x, y) = 2.$$

b. La matrice hessienne en $(1/6, 1/6)$ est donc $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 2 et 6, toutes deux positives, donc f admet un minimum local en A et $m = f(1/6, 1/6) = -1/6$.

3. **a.** En développant, on obtient $2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2=f(x,y)+1/6$.

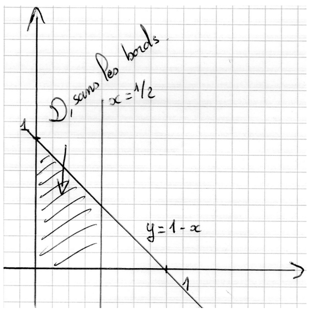
   b. Comme un carré est toujours positif, on a , pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)+1/6\geq 0$, ie $f(x,y)\geq -1/6$. $-1/6$ est donc bien le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$ par $g(x;y)=2e^{2x}+2e^{2y}+2e^{x+y}-e^x-e^y$.

   a. $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x;y)=f(e^x,e^y)\geq -1/6$ d'après 3b.

   b. De plus, $g(\ln(1/6),\ln(1/6))=f(1/6,1/6)=-1/6$, donc g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, -$1/6$, et ce minimum est atteint en $(\ln(1/6),\ln(1/6))$.

Exercice 10 (EML2013 exercice 1 partie IV)

1. 

2. Pour tout $(x,y)\in D$, comme $x+y\in]0,1[$ et $2x\in]0,1[$, on a :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)=f'(x+y)-f'(2x)\ \text{et}\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)=f'(x+y).$$

3 et 4.

$$\begin{aligned}(x,y)\in D\ \text{point critique de}\ G &\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}f'(x+y)-f'(2x)=0\\ f'(x+y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f'(2x)=0\\ f'(x+y)=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2x=\alpha\\ x+y=\alpha\end{cases} \qquad \text{(d'après II.4.b et car } x+y\in]0,1[\text{ et } 2x\in]0,1[)\\ &\Leftrightarrow x=y=\alpha/2.\end{aligned}$$

G admet donc un unique point critique sur D en $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)$.

5. Pour tout $(x,y)\in D$,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y)=f''(x+y)-2f''(2x),\quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y)=f''(x+y)\ \text{et}\ \frac{\partial^2 G}{\partial xy}(x,y)=\frac{\partial^2 G}{\partial yx}(x,y)=f''(x+y),$$

donc la matrice hessienne de G en $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)$ est $\begin{pmatrix}-f''(\alpha) & f''(\alpha)\\ f''(\alpha) & f''(\alpha)\end{pmatrix}$, ayant pour valeurs propres $f''(\alpha)\sqrt{2}$ et $-f''(\alpha)\sqrt{2}$, de signes opposés donc G n'admet pas d'extremum local en $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)$, et, par suite, pas d'extremum local sur D, puisque $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)$ est un point col.