Suites de variables aléatoires

Exercice 1 (Loi de min, loi de max)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère n variables aléatoires X_1, X_2, ... ,X_n, indépendantes, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
On pose $I_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $S_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

1. Montrer que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{P}(X_i > k) = (1-p)^k$.

2. **a.** Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathrm{P}(I_n > k)$.

b. En déduire la loi de I_n.

c. En déduire l'espérance de I_n.

3. **a.** Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathrm{P}(S_n \leq k)$, puis en déduire la loi de S_n.

b. ⋆⋆ ⚠Très calculatoire : En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton, que $\mathrm{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{(-1)^{i-1}}{1-q^i}$

Sous-titrages :

1. On commence par décrire correctement l'événement $(X_i > k)$ par une phrase (mot clé attendu : incompatible ou disjoint) ou par une formule avec des $\cap$ ou $\cup$.
Puisque X_i est une loi connue, on connait $P(X_i = j)$ pour n'importe quel j entier naturel non nul. Il suffit de sommer cela pour j allant de $k+1$ à $+\infty$ (la justification de cette somme étant donnée par le mot clé ci-dessus).

2. **a.** Donner le support de I_n.
Donner la phrase classique à apporter lors de l'étude d'une loi de min et exprimer l'événement $(I_n > k)$ comme une intersection d'événements portant sur les X_i.
Exprimer la proba de cet événement.
Penser à mentionner la mutuelle indépendance pour transformer la proba de l'intersection.
Utiliser le résultat de la question précédente.

b. On exprime $P(I_n = k)$ en fonction de $\mathrm{P}(I_n > k)$ et $\mathrm{P}(I_n > k-1)$ (au besoin s'aider d'un dessin au brouillon).
Après un petit calcul de puissances, reconnaître une loi usuelle.

c. Facile si on a bien reconnu la loi usuelle dans la question précédente.

3. **a.** Mêmes étapes que dans la question **2.** en adaptant à la loi du max.

b. pour simplifier les écritures, on note $q = 1-p$.
Sous réserve de convergence, on exprime l'espérance avec la somme habituelle.
Dans la somme, on utilise deux fois la formule du binôme de Newton.
On constate que le premier terme de chaque somme du binôme du vaut 1 et qu'ils s'éliminent. On commence donc ces sommes à l'indice 1.
On interverti les sommes sans problème car les indices de sommation sont indépendants.
On manipule les puissances de q et l'on sort tout ce que l'on peut des sommes.
On reconnaît et on rédige correctement ce qui concerne des séries géométriques dérivées premières.
On finit les calculs.

Exercice 2 (Lois du nombre d'échecs entre deux succès dans des expériences de Bernoulli répétées)

On désigne par p un réel de $]0;1[$. On considère une suite infinie d'épreuves indépendantes donnant un succès avec la probabilité p et un échec avec la probabilité $1-p$. On note Y_1 le nombre d'échecs obtenus avant le premier succès et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on note Y_k le nombre d'échecs obtenus entre le $(k-1)^e$ et le k^e succès.
Pour tout n, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Donner la loi de Y_1 et vérifier que les variables Y_k suivent toutes la même loi.

2. **a.** Pour tout entier naturel k non nul, on pose $Z_k = Y_k + 1$. Reconnaître la loi de Z_k.

b. En déduire, en utilisant le résultat de la question **1.a.** de l'exercice **2** du cours, la loi de T_n.

Exercice 3 (Utilisation du lemme des coalitions)

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$ et indépendantes.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $Y_n = X_n X_{n+1} X_{n+2}$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.

2. En choisissant i et j dans $(\mathbb{N}^*)^2$, tels que $|i-j| > 2$, calculer $\mathrm{E}(Y_i Y_j)$.