Suites de variables aléatoires discrètes - Éléments de correction

Exercice 1 (Loi de min, loi de max)

1. Puisque le support de X_i est $\mathbb{N}^*$, l'événement $(X_i > k)$ est la réunion disjointe $(X_i = j)$ pour j allant de $k+1$ à l'infini.
   Or X_i suit la loi géométrique de paramètre p donc $P(X_i = j) = (1-p)^{j-1}p$ pour tout j entier naturel non nul.
   Donc, par incompatibilité des événements de la réunion, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_i > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty}(1-p)^{j-1}p$.
   Après calculs, on obtient le résultat voulu.
2. **a.** Le support de I_n est $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout entier naturel k non nul, on a $(I_n > k) = \bigcap_{i=1}^{n}(X_i > k)$car dire que le min des X_i prend une valeur strictement supérieure à k c'est dire que toutes les valeurs X_i prennent simultanément une valeur strictement supérieure à k.
   Donc, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,
   $$\begin{aligned}
   \mathrm{P}(I_n > k) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > k)\right) \\
   &= \prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X_i > k) && \text{par mutuelle indépendance des } X_i \\
   &= \prod_{i=1}^{n}(1-p)^k \\
   &= \left((1-p)^k\right)^n \\
   &= (1-p)^{kn}
   \end{aligned}$$
   b. Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, comme I_n est à valeurs entières, et comme la réunion $(I_n > k-1) = (I_n = k) \cup (I_n > k)$ est disjointe, par incompatibilité, on a donc $\mathrm{P}(I_n > k-1) = \mathrm{P}(I_n = k) + \mathrm{P}(I_n > k)$ et par suite : $P(I_n = k) = \mathrm{P}(I_n > k-1) - \mathrm{P}(I_n > k)$
   Donc $P(I_n = k) = (1-p)^{(k-1)n} - (1-p)^{kn}$ Après calculs, on a $P(I_n = k) = \left((1-p)^n\right)^{k-1}\left(1-(1-p)^n\right)$
   On reconnait que I_n suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^n$.
   c. $\mathrm{E}(I_n) = \dfrac{1}{1-(1-p)^n}$
3. **a.** On trouve successivement : $P(S_n \leq k) = \left(1-(1-p)^k\right)^n$
   Puis $P(S_n = k) = \left(1-(1-p)^k\right)^n - \left(1-(1-p)^{k-1}\right)^n$
   b.

Exercice 2 (Lois du nombre d'échecs entre deux succès dans des expériences de Bernoulli répétées)

On désigne par p un réel de $]0;1[$. On considère une suite infinie d'épreuves indépendantes donnant un succès avec la probabilité p et un échec avec la probabilité $1-p$. On note Y_1 le nombre d'échecs obtenus avant le premier succès et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on note Y_k le nombre d'échecs obtenus entre le $(k-1)^e$ et le k^e succès.
Pour tout n, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. La variable Y_1 compte le nombre d'échecs avant le premier succès. On a alors $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Pour tout j entier, l'événement $(Y_1 = j)$ veut dire que l'on a obtenu j échecs consécutifs puis un succès.
   L'indépendance des épreuves assure que $P(Y_1 = j) = (1-p)^j p$.
   En outre, pour tout entier naturel $k \geq 2$, le nombre d'échecs obtenus entre le $(k-1)^e$ et le k^e succès est un entier naturel j. Par indépendance des épreuves, on obtient aussi $P(Y_k = j) = (1-p)^j p$ si on a obtenu j échecs consécutifs entre le le $(k-1)^e$ et le k^e succès.
   Les variables Y_k suivent donc toutes la même loi.
2. **a.** $Z_k(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pout tout j naturel non nul, $\mathrm{P}(Z_k = j) = \mathrm{P}(Y_k + 1 = j) = \mathrm{P}(Y_k = j-1) = (1-p)^{j-1}p$ donc Z_k suit la loi géométrique de paramètre p.
   b. Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $Y_k(\Omega) = \mathbb{N}$. On en déduit $T(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Pour tout entier naturel j, $\mathrm{P}(T_n) = \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k = j\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k = n+j\right) = \mathrm{P}(S_n = n+j)$
   (en reprenant les notation de l'exercice **2** du cours)
   Donc pour tout j naturel, $\mathrm{P}(T_n = j) = \binom{j+n-1}{n-1}p^n(1-p)^j$

Exercice 3 (Utilisation du lemme des coalitions)

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$ et indépendantes.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $Y_n = X_n X_{n+1} X_{n+2}$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.

   Y_n prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, c'est donc une variable suivant une loi de Bernoulli.
   L'événement $(Y_n = 1)$ est réalisé lorsque les trois variables X_n, X_{n+1} et X_{n+2} sont simultanément égales à 1.
   D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (Y_n = 1) = (X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1) \cap (X_{n+2} = 1)$.
   Les variables X_n étant mutuellement indépendantes, on en déduit :
   $P(Y_n = 1) = P\big((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1) \cap (X_{n+2} = 1)\big) = P(X_n = 1) \times P(X_{n+1} = 1) \times P(X_{n+2} = 1) = p^3$
   Il s'ensuit que $\quad \mathrm{E}(Y_n) = p^3 \quad$ et $\quad \mathrm{V}(Y_n) = p^3(1 - p^3)$

2. En choisissant i et j dans $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, tels que $|i - j| > 2$, calculer $\mathrm{E}(Y_i Y_j)$.
   Lorsque $|i - j| > 2$, on est assurés que X_i, X_{i+1} et X_{i+2} d'une part et X_j, X_{j+1} et X_{j+2} d'autre part ne comportent pas de variable commune, et on peut donc appliquer le lemme des coalitions qui permet d'affirmer que Y_i et Y_j sont indépendantes. Il s'ensuit que $\mathrm{E}(Y_i Y_j) = \mathrm{E}(Y_i)\mathrm{E}(Y_j) = p^6$