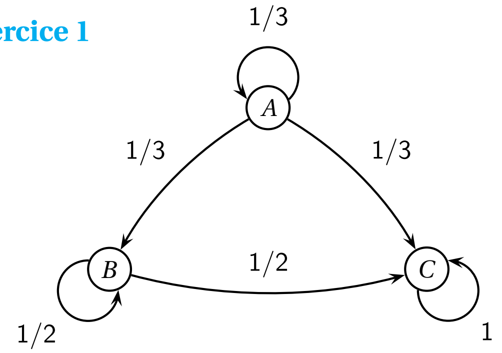
Graphes probabilistes et Chaines de Markov - Éléments de correction

Exercice 1



1. Représenter le graphe probabiliste correspondant à cette situation et expliciter sa matrice de transition M.

Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Donner l'état initial V_0, le preimer et le $2^{\text{ième}}$ état probabiliste V_2. Quelle est la signification concrète de ce deuxième état probabiliste ?

Puisque le pion est en A au début de la partie, l'état initial est $V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À l'étape 1, il y a donc une probabilité d'un tiers d'être en chacun des points A, B et C d'où $V_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

D'après la formule des probabilités totales, appliquée trois fois avec le système complet d'évé$^{\text{ts}}$ $\{(X_1 = A), (X_1 = B), (X_1 = C)\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_2 = A) &= \mathrm{P}(X_1 = A)\mathrm{P}_{(X_1=A)}(X_2 = A) + \mathrm{P}(X_1 = B)\mathrm{P}_{(X_1=B)}(X_2 = A) + \mathrm{P}(X_1 = C)\mathrm{P}_{(X_1=C)}(X_2 = A) \\
&= \mathrm{P}(X_1 = A) \times \frac{1}{3} + 0 + 0 \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_1 = A) \\
&= \frac{1}{9} \\
\mathrm{P}(X_2 = B) &= \mathrm{P}(X_1 = A)\mathrm{P}_{(X_1=A)}(X_2 = B) + \mathrm{P}(X_1 = B)\mathrm{P}_{(X_1=B)}(X_2 = B) + \mathrm{P}(X_1 = C)\mathrm{P}_{(X_1=C)}(X_2 = B) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_1 = A) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_1 = B) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18} \\
\mathrm{P}(X_2 = C) &= \mathrm{P}(X_1 = A)\mathrm{P}_{(X_1=A)}(X_2 = C) + \mathrm{P}(X_1 = B)\mathrm{P}_{(X_1=B)}(X_2 = C) + \mathrm{P}(X_1 = C)\mathrm{P}_{(X_1=C)}(X_2 = C) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_1 = A) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_1 = B) + \mathrm{P}(X_1 = C) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{18}
\end{aligned}$$

D'où $V_2 = \begin{pmatrix} 1/9 & 5/18 & 11/18 \end{pmatrix}$.
Cela signifie qu'au bout du deuxième tour de jeu, la probabilité que le pion soit en A est de 1/9, la probabilité qu'il soit en B est de 5/18 et la probabilité qu'il soit en C est de 11/18.

3. Donner les états stables possibles de cette situation (que l'on peut deviner intuitivement, puis par le calcul).

Intuitivement, on comprend qu'un pion qui est en C avec une probabilité certaine y restera de manière certaine. Cela signifie que l'état probabiliste $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un état stable.

On vérifie par le calcul :
D'après le cours, un état stable est une matrice ligne $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ dont la somme des coefficients vaut 1 et telle que $LM = L$, la matrice colonne ${}^tL = C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ correspondante vérifie ${}^tM{}^tL = {}^tL$ c'est à dire ${}^tMC = C$ et est donc une vecteur propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1, et dont la somme des composantes vaut 1.

On cherche donc à résoudre $\left\{\begin{aligned} \frac{\alpha}{3} &= \alpha \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} &= \beta \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma &= \gamma \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= \gamma \end{aligned}\right.$

Le choix $\gamma = 1$ assure que la somme des composante soit égale à 1. On retrouve le même état stable que trouvé intuitivement.

4. Etude asymptotique :

a. Diagonaliser M dans le but d'en calculer la puissance n.

M est une matrice triangulaire supérieure et l'on peut donc lire ses valeurs propres sur sa diagonale.
Ces valeurs propres étant toutes trois distinctes, et la matrice étant d'ordre 3, on en déduit que M est diagonalisable.
Une étude laissée au lecteur permet de trouver P matrice de passage et son inverse P^{-1} (par la méthode de Gauss-Jordan) ainsi que D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$ et une récurrence (laissée au lecteur) permet de prouver que pour tout n entier naturel,
$$M^n = PD^nP^{-1}$$
avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$, $D^n = \text{diag}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n, \left(\frac{1}{2}\right)^n, 1\right)$ (puisque D est diagonale)

b. Montrer que le $(n+1)^e$ état probabiliste V_{n+1} s'expriment en fonction du n^e état probabiliste V_n grâce à la relation $V_{n+1} = V_n M$.

D'après la formule des probabilités totales, appliquée trois fois avec le système complet d'évéts $\{(X_n = A), (X_n = B), (X_n = C)\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1} = A) &= \mathrm{P}(X_n = A)\mathrm{P}_{(X_n=A)}(X_{n+1} = A) + \mathrm{P}(X_n = B)\mathrm{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = A) + \mathrm{P}(X_n = C)\mathrm{P}_{(X_n=C)}(X_{n+1} = A) \\
&= \mathrm{P}(X_n = A) \times \frac{1}{3} + 0 + 0 \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_n = A) \\
\mathrm{P}(X_{n+1} = B) &= \mathrm{P}(X_n = A)\mathrm{P}_{(X_n=A)}(X_{n+1} = B) + \mathrm{P}(X_n = B)\mathrm{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B) + \mathrm{P}(X_n = C)\mathrm{P}_{(X_n=C)}(X_{n+1} = B) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_n = A) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_n = B) \\
\mathrm{P}(X_{n+1} = C) &= \mathrm{P}(X_n = A)\mathrm{P}_{(X_n=A)}(X_{n+1} = C) + \mathrm{P}(X_n = B)\mathrm{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1} = C) + \mathrm{P}(X_n = C)\mathrm{P}_{(X_n=C)}(X_{n+1} = C) \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_n = A) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_n = B) + \mathrm{P}(X_n = C)
\end{aligned}$$

N.B. : Puisque cette rédaction est assez longue et répétitive, on peut rédiger correctement une des trois FPT et dire " de même on montre que ..." pour les deux autres.

Et les relations obtenues : $\begin{cases} \mathrm{P}(X_{n+1} = A) = \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_n = A) \\ \mathrm{P}(X_{n+1} = B) = \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_n = A) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_n = B) \\ \mathrm{P}(X_{n+1} = C) = \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_n = A) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_n = B) + \mathrm{P}(X_n = C) \end{cases}$ s'écrivent $V_{n+1} = V_n M$ sous forme matricielle.

c. Montrer que le n^e état probabiliste vérifie $V_n = V_0 M^n$.

Il s'agit d'une récurrence sans difficulté laissée au lecteur.

d. Expliciter le n^e état probabiliste.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M^n \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} D^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

NB : il est BEAUCOUP PLUS EFFICACE et SÛR de mener ici les calculs de la gauche vers la droite afin de ne jamais à avoir à multiplier des matrices carrées entre elles mais de ne faire que des calculs avec des matrices lignes ! ! !

e. Les résultats obtenus sont-ils cohérents avec les résultats trouvés en questions 2 et 3 ?

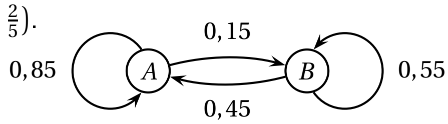
Les résultats sont cohérents avec ce qui a été trouvé en début d'exercice :
En remplaçant n par 2, on retrouve bien l'expression trouvée pour le deuxième état probabiliste, et en faisant tendre n vers l'infini, on retrouve bien l'état stable $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puisque $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont des réels de $]-1, 1[$ et donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2

Élements de correction à étoffer par une rédaction appropriée.

1. $P_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

2. **a.**



b. Et la matrice de transition correspondante est : $$M = \begin{pmatrix} \frac{17}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{11}{20} \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 17 & 3 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

c. Il s'agit de calculer le n^e état probabiliste et de le multiplier par l'effectif total du groupe. Il s'agit donc calculer $2500 P_0 M^n$.

Le calcul de M^n peut aisément se faire en diagonalisant M. On commence par diagonaliser $A = 20M = \begin{pmatrix} 17 & 3 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$

On cherchant les valeurs λ telles que $A - \lambda I$ soit non inversible, on trouve que λ doit être racine $\lambda^2 - 28\lambda + 160$ et une étude classique donne $Sp(A) = \{8, 20\}$

On trouve facilement (calculs laissés au lecteur) que A est semblable à $D = diag(8, 20)$ et en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$ avec $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve donc que $M = \frac{1}{20}A = \frac{1}{20}PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{8}{20} & 0 \\ 0 & \frac{20}{20} \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Une récurrence évidente permet de montrer que $M^n = P\left[\text{diag}\left(\frac{2}{5}, 1\right)\right]^n P^{-1} = P \ \text{diag}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n, 1\right)P^{-1}$.

Au final, on doit donc calculer : $2500 P_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1500 & 1000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2/5)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $2500 P_n = \frac{500}{4}\begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2/5)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{500}{4}\begin{pmatrix} -3(2/5)^n & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{500}{4}\begin{pmatrix} -3(2/5)^n + 15 & 3(2/5)^n + 5 \end{pmatrix}$

NB : Les calculs sont bien à mener ici de la gauche vers la droite dans le sens usuel de lecture afin de simplifier le calcul matriciel.

Il y a donc $-375(2/5)^n + 1875$ abonnés pour la formule A et $375(2/5)^n + 625$ abonnés pour la formule B pendant l'année n.

3. ${}^tM = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

On cherche les éventuels vecteurs propres de ${}^tM$ associés à la valeur propre 1.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$X \in \mathrm{E}_1({}^tM) \Leftrightarrow ({}^tM - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0,15x + 0,45y = 0 \\ 0,15x - 0,45y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y$ d'où $E_1({}^tM) = \left\{\begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\}$

Donc un état stable possible π vérifierait $\pi = {}^tX = \begin{pmatrix} 3y & y \end{pmatrix}$. pour un certain y appartenant à $\mathbb{R}$.
Un état stable étant un vecteur ligne constitué de composantes positives de somme égale à 1, il vient $4y = 1$ d'où $y = \frac{1}{4}$
En conclusion, le seul état stable possible est $\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
Or $\dfrac{3}{4} \times 2500 = 1875$ et $\dfrac{1}{4} \times 2500 = 625$.
Donc si l'année zéro il y avait eu 1875 personnes ayant choisi l'abonnement A et 625 personnes ayant choisi l'abonnement B, cette situation serait restée stable d'année en année.
NB : On remarque que l'état limite obtenu dans la question précédente confirme ce résultat puisque $\left(\frac{2}{5}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $-1 < \frac{2}{5} < 1$).

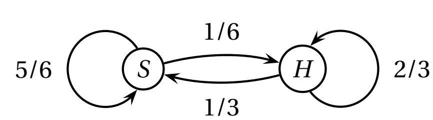
Exercice 3

Élements de correction à étoffer par une rédaction appropriée.

1. $s_n + h_n = 1$

2. **a.** $T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

b.



3. **a.** $M = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

b. $M^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

c. Pour connaître les probabilités que le temps soit sec ou non le mardi suivant, il s'agit de connaître le 2me état probabiliste, qui se calcule avec $T_2 = T_0 M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
Il y aura donc 3 chances sur 4 que le temps soit sec.

4. **a.** ${}^tM = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

On cherche les éventuels vecteurs propres de ${}^tM$ associés à la valeur propre 1.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$X \in \mathrm{E}_1({}^tM) \Leftrightarrow ({}^tM - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y = 0 \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$ d'où $E_1({}^tM) = \left\{\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\}$

Donc un état stable possible π vérifierait $\pi = {}^tX = \begin{pmatrix} 2y & y \end{pmatrix}$. pour un certain y appartenant à $\mathbb{R}$.
Un état stable étant un vecteur ligne constitué de composantes positives de somme égale à 1, il vient $3y = 1$ d'où $y = \frac{1}{3}$
En conclusion, le seul état stable possible est $\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b. Lorsque la loi limite existe, c'est un état stable de la chaîne. Or ici la loi limite existe.
En effet, le n^e état probabiliste de la chaine de Markov s'obtient en calculant M^n. On peut démontrer facilement en diagonalisant M qu'elle est semblable à une matrice diagonale d'éléments diagonaux 1 et $1/2$. Les coefficients de M^n sont alors des combinaisons linéaires de 1^n et $(1/2)^n$, suites géométriques respectivement convergentes vers 1 et 0 puisque $-1 < 1/2 < 1$.
La probabilité qu'il pleuve à long terme est de un tiers.