Variables aléatoires réelles à densité - lois usuelles et transferts

Exemples de transferts

Exercice 1 (Fonctions de répartition)

Soit X une variable à densité de fonction de répartition F, et de support réel. Exprimer les probabilités suivantes grâce à la fonction de répartition F.

1. $\mathrm{P}\big(|X| \leq 3\big)$
2. $\mathrm{P}\big(|X| > 5\big)$
3. $\mathrm{P}(\lfloor X \rfloor \leq 8)$
4. $\mathrm{P}(Y < 7)$ avec $Y = 5X + 2$
5. $\mathrm{P}(Y > 5)$ avec $Y = 1 - 2X$
6. $\mathrm{P}(Y \leq e)$ avec $Y = e^X$
7. $\mathrm{P}(Y < 9)$ avec $Y = X^2$
8. $\star$ $\mathrm{P}(Y > \alpha)$ avec $Y = e^{X+1}$
9. $\star$ $\mathrm{P}(Y \geq t)$ avec $Y = (X-1)^2$
10. $\mathrm{P}(T = 8)$ avec $T = \lfloor X \rfloor$
11. $\star$ $\mathrm{P}\big(T < t\big)$ avec $T = \lfloor X \rfloor$
12. $\star\star$ $\mathrm{P}(Z > a)$ avec $Z = e^{X^2+1}$

Dans les questions suivantes, on supposera que X est à support dans $\mathbb{R}_+^*$, et on notera toujours F sa fonction de répartition :

22. $\mathrm{P}(Z < 1)$ avec $Z = \ln(X)$
23. $\mathrm{P}(Z > 5\ln 2)$ avec $Z = \ln(X+1)$
24. $\mathrm{P}(T \leq 4)$ avec $T = \sqrt{X}$
25. $\mathrm{P}(T > \beta)$ avec $T = \sqrt{X+2}$
26. $\mathrm{P}(2 < Y < 9)$ avec $Y = \frac{1}{X+1}$
27. $\mathrm{P}(Y \leq t)$ avec $Y = \frac{1}{X}$ et $t > 0$

Exercice 2 (Trouver la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire)

Soit Z la variable aléatoire définie par l'égalité $Z = \ln X$, ou X a été définie à la question 2. de l'exercice 3 du TD sur les variables à densité. Déterminer la fonction de répartition de la variable Z.

Variables aléatoires à densité usuelles

Exercice 3 (Justifier les résultats du cours sur la loi uniforme et la loi exponentielle)

Démontrer les résultats de cours sur la loi uniforme $\mathscr{U}\big([0,1]\big)$, à savoir : la fonction f proposée est bien une densité, la fonction de répartition proposée est cohérente avec la fonction densité, et démontrer que l'espérance et la variance existent et sont égales aux formules proposés dans le cours.
Idem pour la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ quelconque (le cas $\lambda = 1$ a été abondamment traité dans les exemples du cours.)

Exercice 4

Soient X et Y deux var aléatoires indépendantes suivant respectivement $\mathscr{N}(18,4)$ et $\mathscr{N}(3,1)$. Quelle est la loi suivie par $\frac{1}{2}X - 2Y$?

Exercice 5

Soient λ et a deux réels strictement positifs. Si X suit la loi $\mathscr{E}(\lambda)$, quelle est la loi suivie par $Y = aX$?

Exercice 6 (Loi de max, loi de min)

1. Déterminer la loi du maximum S de deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
2. Déterminer la loi du minimum de deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs a et b (a et b étant des réels strictement positifs)

Exercice 7 (Calculs d'espérance et de variance)

1. Soit λ un réel strictement positif, soi X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
   a. Déterminer les valeurs du réel t pour lequel $\mathrm{E}(e^{tX})$ existe et déterminer le cas échéant la valeur de cette espérance.
   b. Déterminer, si elle existe, la valeur de $\mathrm{V}(e^{tX})$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(1/2)$. Prouver que $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right)$ existe et donner sa valeur.
3. Soient N_1 et N_2 deux var indépendantes suivant respectivement la loi normale $\mathscr{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathscr{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Déterminer l'espérance et la variance de la var $N_1 + N_2$. En déduire la loi suivie par $N_1 + N_2$.

Exercice 8

1. Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$.
2. Soit X une var suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Montrer que $Y = e^X$ est une var à densité et en déterminer une densité.

Exercice 9

En s'aidant d'une table de loi normale, donner une valeur approchée à 10^{-3} près des probabilités suivantes, sachant que $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$:

1. $\mathrm{P}(X \geq 0{,}79)$
2. $\mathrm{P}(X < 1{,}35)$
3. $\mathrm{P}(X \leq -0{,}38)$
4. $\mathrm{P}(X > -2{,}22)$
5. $\mathrm{P}(0{,}11 < X < 0{,}87)$
6. $\mathrm{P}(-1{,}17 < X \leq 2{,}1)$

Exercice 10 (En situation)

Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de la grossesse est de distribution approximativement normale de moyenne 270 jours avec un écart-type de 10 jours. L'un des pères putatifs est en mesure de prouver son absence du pays entre le 290ième et le 240ième jour précédant l'accouchement. Quelle est la probabilité que cet homme ne soit pas le père de l'enfant ?

Exercice 11 (★★ Une loi étrange)

À un arrêt de bus, les bus se succèdent l'un après l'autre, la durée séparant l'arrivée de deux bus étant distribuée selon une loi $\mathscr{E}(2)$ (le temps étant compté en heures). J'arrive à l'arrêt au moment précis ou un bus s'en va. Je décide d'attendre le suivant une demi-heure et pas plus. Soit T la durée durant laquelle j'attends le bus.

1. Déterminer la loi de T.
2. T est-elle une variable à densité ? Une variable discrète ?

Exercice d'annale

Exercice 12 (EDHEC 2016 ex 3)

Dans cet exercice, toutes les v.a.r. sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et on désigne par p un réel de $]0,1[$.
On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, t. q. U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.
On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par

$$\mathrm{P}(Z=1)=p \text{ et } \mathrm{P}(Z=-1)=1-p.$$

Enfin, on note X la variable aléatoire définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega)=\begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega)=1, \\ \mathrm{V}(\omega) & \text{si } Z(\omega)=-1. \end{cases}$$

On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner une expression de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.
2. **a.** Établir, grâce au système complet d'événements $([Z=1],[Z=-1])$, que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x)=p\,F_U(x)+(1-p)\,F_V(x).$$

   b. Vérifier que $X(\Omega)=[-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas suivants :

   $$x<-3, \quad -3 \leq x \leq -1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq x \leq 3 \text{ et } x>3.$$

   c. On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

   d. Établir que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et une variance $\mathrm{V}(X)$, puis les déterminer.
3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

   a. Vérifier que $X=U\,\frac{1+Z}{2}+V\,\frac{1-Z}{2}$.

   b. Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathrm{E}(X)$.

   c. En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathrm{E}(X^2)$.
4. **a.** Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi de $2T-1$.

   b. On rappelle que `(b-a)*rd.random()+a` et `rd.binomial(1,p)` sont des instructions Python qui permettent de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ et une variable aléatoire discrète suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On supposera les bibliothèques utiles déjà installées avec les pseudo usuels.
   Écrire des instructions Python permettant de simuler U, V, Z, puis X.