Variables aléatoires réelles à densité - Éléments de correction

Généralités sur les variables aléatoires à densité

Exercice 1 (Familiarisation avec la fonction de répartition)

Soit X une variable à densité de fonction de répartition F, et de support réel. Exprimer les probabilités suivantes grâce à la fonction de répartition F.

Indication :

- Pour cet exercice, on se souviendra que, pour une variable aléatoire réelle X à densité, la probabilité $\mathrm{P}(X=x)=0$, ce qui nous permet de ne pas avoir besoin de faire attention au caractère strict ou large des inégalités.
- En revanche, si l'on opère une transformation sur X qui créée une variable aléatoire discrète, il faudra être beaucoup plus vigilant (dans le cas de la partie entière notamment).
- Dans certaines questions, il faudra discuter selon la valeur du paramètre.

Réponses brutes :

1. $\mathrm{P}\big(|X|\le 3\big)=F(3)-F(-3)$ **2.** $\mathrm{P}\big(|X|>5\big)=1-F(5)+F(-5)$ **3.** $\mathrm{P}(\lfloor X\rfloor\le 8)=F(9)$

4. $\mathrm{P}(Y<7)=\mathrm{P}(5X+2<7)=\mathrm{P}(5X<5)=\mathrm{P}(X<1)=\mathrm{P}(X\le 1)=F(1)$ $(Y=5X+2)$

5. $\mathrm{P}(Y>5)=\mathrm{P}(1-2X>5)=\mathrm{P}(-2X>4)=\mathrm{P}(X<-2)=\mathrm{P}(X\le -2)=F(-2)$ $(Y=1-2X)$

6. $\mathrm{P}(Y\le e)=\mathrm{P}(e^X\le e)=\mathrm{P}(X\le 1)=F(1)$ (grâce à la croissance de la fonction ln) $(Y=e^X)$

7. $\mathrm{P}(Y<9)=\mathrm{P}(X^2<9)=\mathrm{P}(-3<X<3)=F(3)-F(-3)$ $(Y=X^2)$

8. $\mathrm{P}(Y>\alpha)=\begin{cases}1 & \text{si } \alpha\le 0\\ \mathrm{P}\big(e^{X+1}>\alpha\big)=\mathrm{P}(X+1>\ln\alpha)=\mathrm{P}(X>\ln\alpha-1)=1-F(\ln\alpha-1) & \text{si } \alpha>0 \text{ (croissance de la fonction ln)}\end{cases}$ $(Y=e^{X+1})$

9. $\mathrm{P}(Y\ge t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\le 0\\ 1-F\big(1+\sqrt{t}\big)+F\big(1-\sqrt{t}\big) & \text{sinon}\end{cases}$ $(Y=(X-1)^2)$

10. $\mathrm{P}(T=8)=F(9)-F(8)$ $(T=\lfloor X\rfloor)$

11. $\star$ $\mathrm{P}\big(T<t\big)=\begin{cases}F(t) & \text{si } t\in\mathbb{N}\\ F(\lfloor t\rfloor+1) & \text{si } t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\end{cases}$ $(T=\lfloor X\rfloor)$

12. $\star\star$ $\mathrm{P}(Z>a)=\begin{cases}1 & \text{si } a\le e\\ 1-F\big(\sqrt{\ln a-1}\big)+F\big(-\sqrt{\ln a-1}\big) & \text{si } a>e\end{cases}$ $(Z=e^{X^2+1})$

Dans les questions suivantes, on supposera que X est à support dans $\mathbb{R}_+^*$, et on notera toujours F sa fonction de répartition :

22. $\mathrm{P}(Z<1)=F(e)$ $(Z=\ln(X))$

23. $\mathrm{P}(Z>5\ln 2)=1-F(31)$ $(Z=\ln(X+1))$

24. $\mathrm{P}(T\le 4)=F(16)$ $(T=\sqrt{X})$

25. $\mathrm{P}(T>\beta)=\begin{cases}1 & \text{si } \beta\le 0\\ 1-F\big(\beta^2-2\big) & \text{sinon}\end{cases}$ $(T=\sqrt{X+2})$

26. $\mathrm{P}(2<Y<9)=F\big(-\frac{1}{2}\big)-F\big(-\frac{8}{9}\big)$ $(Y=\frac{1}{X+1})$

27. $\mathrm{P}(Y\le t)=1-F\big(\frac{1}{t}\big)$ $(Y=\frac{1}{X}$ et $t>0)$

Exercice 2 (Trouver la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire)

X prenant ses valeurs dans $]0,1]$, $Z=\ln X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_-$. Donc le support de Z est $Z(\Omega)=\mathbb{R}_-$

Donc pour tout x dans $\mathbb{R}_-$, $\mathrm{P}(Z\le x)=\mathrm{P}(\ln X\le x)=\mathrm{P}(X\le e^x)=\big(e^x\big)^3$ car $e^x\in]0,1]$ lorsque $x<0$.

la fonction de répartition h de Z est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\begin{cases}e^{3x} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$

Variables aléatoires à densité usuelles

Exercice 4

Soient X et Y deux var aléatoires indépendantes suivant respectivement $\mathcal{N}(18,4)$ et $\mathcal{N}(3,1)$. Donc $\frac{1}{2}X\hookrightarrow\mathcal{N}(9,1)$ et $-2Y\hookrightarrow\mathcal{N}(-6,4)$.
Puisque X et Y sont indépendantes, il en est de même de $\frac{1}{2}X$ et $-2Y$ d'après le lemme des coalitions, donc $\frac{1}{2}X-2Y\hookrightarrow\mathcal{N}(9-6,1+4)$ d'après la propriété de stabilité par la somme de deux variables suivant des lois normales
Donc $\frac{1}{2}X-2Y\hookrightarrow\mathcal{N}(3,5)$

Exercice 5

Soient λ et a deux réels strictement positifs. Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $Y=aX$ suit la loi $\mathcal{E}\big(\frac{\lambda}{a}\big)$.
Pour la démonstration, procéder comme dans l'exercice 3. du cours.

Exercice 6 (Loi de max, loi de min)

1. X et Y suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, elles ont toutes les deux pour fonction de répartition la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}.$
   Or, pour tout x réel, le max S de deux valeurs X et Y est inférieur à un nombre x si les deux valeurs sont simultanément inférieures à x.
   d'où, pour tout x réel, $\mathrm{P}(S\leq x)=\mathrm{P}\big((X\leq x)\cap(Y\leq x)\big)$.
   X et Y étant indépendantes, $\mathrm{P}(S\leq x)=\mathrm{P}(X\leq x)\mathrm{P}(Y\leq x)$.
   Donc pour $\mathrm{P}(S\leq x)=\big(F(x)\big)^2=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}.$
   En appelant F_S cette fonction, on vérifie facilement que F_S est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 saut peut-être en 0 et en 1. (il se trouve qu'elle est même C^1 en 0 mais peu importe, cela n'a aucune utilité et fait perdre du temps pour rien).
   Donc F_S est la fonction de répartition d'une variable à densité dont la fonction densité peut être obtenue facilement en dérivant F_S partout où elle est de classe C^1 et en attribuant des points d'office ailleurs.
   Par exemple, la fonction f_s définie sur $\mathbb{R}$ par $f_S(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 2x & \text{si } x\in[0,1]\\ 0 & \text{si } x>1\end{cases}$ est une densité de S.

2. On procède à peu près de même qu'en question **a.** hormis que l'on utilise le fait que pour tout x réel, le min I de deux valeurs X et Y est strictement supérieur à un nombre x si les deux valeurs sont simultanément strictement supérieures à x.
   Après calculs, on trouvera que I suit la loi exponentielle de paramètre $a+b$.

Exercice 7 (Calculs d'espérance et de variance)

1. Soit λ un réel strictement positif, soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
   a. On pose $Y=e^{tX}$. Alors $Y(\Omega)=\mathbb{R}_+^*$ et $X(\Omega)=\mathbb{R}^+$.
   On utilise le théorème de transfert car la fonction $x\mapsto e^{tx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et sous réserve d'existence, pour tout t réel : $\mathrm{E}(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f_X(t)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lambda e^{tx}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda-t)x}\,\mathrm{d}x$
   On doit prouver la convergence absolue de cette intégrale qui équivaut ici à la convergence car $\lambda e^{tx}e^{-\lambda x}>0$ sur $\mathbb{R}$.
   Cette intégrale est une intégrale exponentielle, elle converge si et seulement si $\lambda-t>0$, c'est à dire si $t<\lambda$.
   Donc $\mathrm{E}(e^{tX})$ existe si et seulement si $t<\lambda$ et vaut $\mathrm{E}(e^{tX})=\frac{\lambda}{\lambda-t}$
   b. On sait que $\mathrm{E}(e^{tX})$ existe si et seulement si $t<\lambda$. Donc $\mathrm{E}(e^{2tX})$ existe si et seulement si $t<\frac{\lambda}{2}$.
   donc pour tout $t<\frac{\lambda}{2}$, la variance existe et d'après la formule de Koenig-Huygens, $\mathrm{V}(e^{tX})=\mathrm{E}(e^{2tX})-\big(\mathrm{E}(e^{tX})\big)^2=\frac{\lambda}{\lambda-2t}-\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^2$

2. On pose $Y=\frac{1}{\sqrt{X}}$. Alors $Y(\Omega)=\mathbb{R}_+^*$ et $X(\Omega)=\mathbb{R}^+$.
   On utilise le théorème de transfert car la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Sous réserve d'existence, on a alors :
   $\mathrm{E}(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.$
   On doit prouver la convergence absolue de cette intégrale qui équivaut ici à la convergence car $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{2}}>0$ sur $\mathbb{R}$.
   Cette intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
   Pour contourner cette difficulté, on va effectuer un changement de variable C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle $[\varepsilon,M]$.
   Posons $u=\sqrt{x}$. Alors $u^2=x$ et $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$.
   Après avoir fait le changement de variable et fait tendre ε vers 0 et M vers $+\infty$, on est ramené à étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$.
   Or on sait que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u=1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u=\sqrt{2\pi}$ d'où, par parité, $\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
   Donc $\mathrm{E}(Y)$ existe et vaut $\mathrm{E}(Y)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3. C'est du cours, $\mathrm{E}(N_1+N_2)=m_1+m_2$ et $\mathrm{V}(N_1+N_2)=\sigma_1^2+\sigma_2^2$. N_1+N_2 suit la loi normale $\mathcal{N}\big(m_1+m_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\big)$ d' après la propriété de stabilité par la somme de deux variables suivant des lois normales.

Exercice 8

1. Posons $Y=\lfloor X\rfloor$ et appelons F la fonction de répartition de X.
   $X(\Omega)=\mathbb{R}^+$ donc $Y(\Omega)=\mathbb{N}$. Y est une variable aléatoire discrète à valeurs entières.

Pour déterminer sa loi, on ne va donc pas considérer sa fonction de répartition, mais on va s'intéresser à la valeur de $P(Y=k)$ pour k dans son support.
$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k) = P(\lfloor X \rfloor = k) = P(k \leq X < k+1) = F(k+1) - F(k) = 1 - e^{-(k+1)} - 1 + e^{-k} = e^{-k}(1-e^{-1}) = \left(\frac{1}{e}\right)^k \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.
On remarque qu'en posant $Z = Y+1$, $Z \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

2. Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$, et $Y = e^X$, on a $Y(\Omega) = [1;+\infty[$.
On pose F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de Y.
$\forall x < 1, \quad F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0.$
$\forall x \geq 1, \quad F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln x)$ par croissance de ln.
$F_Y(x) = F_X(\ln x) = 1 - e^{-\lambda(\ln x)}$ car $\ln x \geq 0$ pour $x \geq 1$.
$F_Y(x) = 1 - x^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{x^\lambda}$
Il suffit donc maintenant de justifier la régularité de F_Y pour montrer que Y est bien une variable à densité.
F est de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles et sur $]-\infty;1[$ comme fonction constante.
Comme de plus $\lim\limits_{x\to 1^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 - \frac{1}{x^\lambda} = 0 = \lim\limits_{x\to 1^-} F_Y(x)$, on sait que F_Y est continue en 1 et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier puisqu'elle était déjà de classe C^1 partout ailleurs.
Donc Y est bien une variable à densité.
Pour déterminer une densité f_y, il suffit de dériver F_Y partout sauf en 1 et de lui attribuer une valeur arbitraire en 1. On trouve par exemple :
$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 10 (En situation)

Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de la grossesse est de distribution approximativement normale de moyenne 270 jours avec un écart-type de 10 jours. L'un des pères putatifs est en mesure de prouver son absence du pays entre le 290ième et le 240ième jour précédant l'accouchement. Quelle est la probabilité que cet homme ne soit pas le père de l'enfant ?

Posons X une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(270, 10^2)$. L'énoncé nous invite donc à calculer $P = P(240 < X < 290)$.
Aidons nous de la variable $Y = \frac{X-270}{10}$ qui suit loi normale centrée réduite. On a donc la relation $X = 10Y + 270$
Il s'agit donc de calculer $P = P(240 < 10Y + 270 < 290) = P(-30 < 10Y < 20) = P(-3 < Y < 2)$
$P = \Phi(2) - \Phi(-3) = \Phi(2) + \Phi(3) - 1.$
En s'aidant de la table d'une loi normale centrée réduite, on trouve : $\Phi(2) \simeq 0{,}9772$ et $\Phi(3) \simeq 0.9987$.
Au final, $P = 0{,}9759$.
Il y a donc 97,59% de risque environ que cet homme ne soit pas le père de l'enfant.

Exercice 11 (★★ Une loi étrange)

1. Réponses brutes sans développements :
$T(\Omega) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\ P(T < x) = P(X < x) = 1 - e^{-2x}$ et $P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e}$.
Donc en notant F_T la fonction de répartition de la var T, $F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 - e^{2x} & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ 1 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$

2. T n'est pas une variable à densité car on voit que sa fonction de répartition n'est pas continue en $1/2$.
T n'est pas non plus une variable discrète car son support n'est ni fini ni dénombrable.

Exercice d'annale

Exercice 12 (EDHEC 2016 ex 3)

1. On obtient

$$\boxed{\begin{aligned} F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{x+3}{4} & \text{si } x \in [-3, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\ F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } x \in [-1, 3] \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}. \end{aligned}}$$

2. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((Z=1),(Z=-1))$, on a :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathrm{P}(X \leq x) \\ &= \mathrm{P}(Z=1 \cap X \leq x) + \mathrm{P}(Z=-1 \cap X \leq x) \\ &= \mathrm{P}(Z=1 \cap U \leq x) + \mathrm{P}(Z=-1 \cap V \leq x) \\ &= \mathrm{P}(Z=1)\mathrm{P}(U \leq x) + \mathrm{P}(Z=-1)\mathrm{P}(V \leq x) && \text{(indep)} \\ &= pF_U(x) + (1-p)F_V(x). \end{aligned}$$

b. Si $Z=1$, alors X peut prendre des valeurs entre -3 et 1.
Si $Z=-1$, alors X peut prendre des valeurs entre -1 et 3.
Donc $X(\Omega) = [-3,3]$.
Si $x < -3$, alors $F_U(x) = 0$ et $F_V(x) = 0$, donc $F_X(x) = 0$.
Si $-3 \leq x < -1$, alors $F_U(x) = \frac{x+3}{4}$ et $F_V(x) = 0$, donc $F_X(x) = p\frac{x+3}{4}$.
Si $-1 \leq x \leq 1$, alors $F_U(x) = \frac{x+3}{4}$ et $F_V(x) = \frac{x+1}{4}$, donc $F_X(x) = p\frac{x+3}{4} + (1-p)\frac{x+1}{4} = \frac{x+1-2p}{4}$.
Si $1 < x \leq 3$, alors $F_U(x) = 0$ et $F_V(x) = \frac{x+1}{4}$, donc $F_X(x) = (1-p)\frac{x+1}{4}$.
Si $x > 3$, alors $F_U(x) = 1$ et $F_V(x) = 1$, donc $F_X(x) = p + (1-p) = 1$.
D'où

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ p\frac{(x+3)}{4} & \text{si } -3 \leq x < -1 \\ \frac{(x+1-2p)}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (1-p)\frac{(x+1)}{4} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}}$$

c. Une densité f_X de X peut être

$$\boxed{f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{p}{4} & \text{si } -3 \leq x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{(1-p)}{4} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}}$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} f_X(-3) = p/4, \\ f_X(-1) = f_X(1) = 1/4 \\ \text{ et } f_X(3) = (1-p)/4. \end{cases}$$

d. ▶ Comme f_X est nulle sur $]-\infty,-3[$ et sur $]3,+\infty[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_3^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
$\displaystyle\int_{-3}^{-1} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1} \frac{p}{4}x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{px^2}{8}\right]_{-3}^{-1} = -p$.
$\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{8}\right]_{-1}^{1} = 0$.
$\displaystyle\int_{1}^{3} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} \frac{(1-p)}{4}x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1-p)x^2}{8}\right]_{1}^{3} = 1-p$.
D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc X admet une espérance et $\mathrm{E}(X) = -p+1-p = 1-2p$.

▶ De même, comme f_X est nulle sur $]-\infty,-3[$ et sur $]3,+\infty[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} x^2f(x)\,\mathrm{d}x = \int_3^{+\infty} x^2f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
$\displaystyle\int_{-3}^{-1} x^2f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1} \frac{p}{4}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{px^3}{12}\right]_{-3}^{-1} = \frac{26}{12}p$.
$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{12}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{12}$.
$\displaystyle\int_{1}^{3} x^2f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} \frac{(1-p)}{4}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1-p)x^3}{12}\right]_{1}^{3} = \frac{26(1-p)}{12}$.
D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc X admet un moment d'ordre 2 ($\mathrm{E}(X^2) = \frac{26}{12}p + \frac{2}{12} + \frac{26(1-p)}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$), donc une variance et, d'après K-H,

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{7}{3} - (1-2p)^2.$$

3. **a.** Si $Z=-1$, alors on a $X=V$ (d'après l'énoncé) et $U\frac{1+Z}{2}+V\frac{1-Z}{2}=V$, donc l'égalité est vérifiée.
Si $Z=1$, alors on a $X=U$ (d'après l'énoncé) et $U\frac{1+Z}{2}+V\frac{1-Z}{2}=U$, donc l'égalité est vérifiée.
Dans tous les cas, on a donc bien $X=U\frac{1+Z}{2}+V\frac{1-Z}{2}$.

b. Z est finie, donc Z admet une espérance et $\mathsf{E}(Z)=\mathrm{P}(Z=1)-\mathrm{P}(Z=-1)=p-(1-p)=2p-1$.
Z admet une espérance , donc $\frac{1+Z}{2}$ aussi et $\mathsf{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right)=\frac{1+\mathsf{E}(Z)}{2}=p$.
Comme U et Z sont indépendantes, U et $\frac{1+Z}{2}$ le sont aussi.
Par suite, $U\frac{1+Z}{2}$ admet une espérance comme produit de variables indépendantes admettant une espérance et $\mathsf{E}\left(U\frac{1+Z}{2}\right)=\mathsf{E}(U)\mathsf{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right)=p$.
De même, on montre que $V\frac{1-Z}{2}$ admet une espérance et $\mathsf{E}\left(V\frac{1-Z}{2}\right)=\mathsf{E}(V)\mathsf{E}\left(\frac{1-Z}{2}\right)=1-p$.
Enfin, $X=U\frac{1+Z}{2}+V\frac{1-Z}{2}$ admet une espérance comme combinaison linéaire de variables admettant une espérance et

$$\mathsf{E}(X)=\mathsf{E}\left(U\frac{1+Z}{2}\right)+\mathsf{E}\left(V\frac{1-Z}{2}\right)=-p+(1-p)=1-2p.$$

c. On a

$$\begin{aligned}X^2&=\left(U\tfrac{1+Z}{2}+V\tfrac{1-Z}{2}\right)^2\\&=U^2\tfrac{(1+Z)^2}{4}+2UV\tfrac{(1+Z)(1-Z)}{4}+V^2\tfrac{(1-Z)^2}{4}\\&=U^2\tfrac{1+2Z+Z^2}{4}+2UV\tfrac{1-Z^2}{4}+V^2\tfrac{1-2Z+Z^2}{4}\\&=U^2\tfrac{2+2Z}{4}+V^2\tfrac{2-2Z}{4}&&\text{(car, comme } Z(\Omega)=\{\pm1\},\ Z^2(\Omega)=\{1\}\text{, donc } Z^2=1)\\&=U^2\tfrac{1+Z}{2}+V^2\tfrac{1-Z}{2}\end{aligned}$$

Ensuite, on montre comme en **3b** que $U^2\frac{1+Z}{2}$ et $V^2\frac{1-Z}{2}$ admettent une espérance et on a

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(U^2\tfrac{1+Z}{2}\right)&=\mathsf{E}(U^2)\mathsf{E}\left(\tfrac{1+Z}{2}\right)\\&=\left(\mathsf{V}(U)+(\mathsf{E}(U))^2\right)\mathsf{E}\left(\tfrac{1+Z}{2}\right)\\&=\tfrac{28}{12}p\\\text{et } \mathsf{E}\left(V^2\tfrac{1-Z}{2}\right)&=\mathsf{E}(V^2)\mathsf{E}\left(\tfrac{1-Z}{2}\right)\\&=\tfrac{16}{12}(1-p)\\&=\left(\mathsf{V}(V)+(\mathsf{E}(V))^2\right)\mathsf{E}\left(\tfrac{1+Z}{2}\right)\\&=\tfrac{28}{12}(1-p).\end{aligned}$$

Enfin, $X^2=U^2\frac{1+Z}{2}+V^2\frac{1-Z}{2}$ admet une espérance comme combinaison linéaire de variables admettant une espérance et

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X^2)&=\mathsf{E}\left(U^2\tfrac{1+Z}{2}\right)+\mathsf{E}\left(V^2\tfrac{1-Z}{2}\right)\\&=\tfrac{28}{12}p+\tfrac{28}{12}(1-p)\\&=\tfrac{7}{3}.\end{aligned}$$

4. **a.** Si $T\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, alors $(2T-1)(\Omega)=\{\pm1\}$, et

$$\mathrm{P}(2T-1=-1)=\mathrm{P}(T=0)=1-p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(2T-1=1)=\mathrm{P}(T=1)=p$$

b.
```
U=4*rd.random()-3
V=4*rd.random()-1
Z=2*rd.binomial(1,p)-1
X=U*(1+Z)/2 + V*(1-Z)/2
```