Loi faible des grands nombres, Théorème Limite Central, cv en loi

Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1

On lance n fois une pièce. Donner un majorant de la probabilité que la fréquence observée du nombre de pile s'écarte de plus de ε de $\frac{1}{2}$

Exercice 2 (d'après EDHEC 2017, voie S)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires, notées $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant toutes le même loi uniforme sur $[0,1]$.
On note M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

0. On peut montrer à titre d'entrainement que $\mathrm{E}(M_n) = \frac{n}{n+1}$ et $\mathrm{E}(M_n^2) = \frac{n}{n+2}$ ou l'admettre et passer aux questions suivantes.

1. Donner, pour tout $\varepsilon > 0$, un majorant ne dépendant que de n et de ε de la probabilité $\mathrm{P}\big((M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2\big)$

2. Conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}(|M_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$

Convergence en loi

Exercice 3

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telles que, pour tout n, X_n suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{n}$.
Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

Exercice 4 (d'après EDHEC 2013)

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires ayant pour fonctions de répartition : $G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2n} \\ \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x > \frac{1}{2n} \end{cases}$

Montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire à densité, que l'on notera Y.

Exercice 5 (d'après EDHEC 2017, voie S, suite de l'ex 2)

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathscr{U}([0,1])$. On note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
On pose $Y_n = n(1 - M_n)$

1. On suppose que les bibliothèques usuelles sont importées avec les raccourcis habituels. On rappelle que `rd.random(n)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$ et que $np.max(V)$ renvoie le maximum des composantes d'un vecteur V.
Compléter la déclaration de fonction Python suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n.

```python
def f(n):
    X=rd.random(n)
    Y=...
    return Y
```

2. Voici deux scripts (celui de droite utilise la fonction `f` définie ci-dessus) :

```python
e=rd.exponential(1,10000)
s=np.linspace(0,10,11)
plt.hist(e,s)
plt.show()
```

```python
n=int(input('Entrer la valeur de n:'))
Y=[]
for k in range(1,10001):
    Y.append(f(n))
s=np.linspace(0,10,11)
plt.hist(Y,s)
plt.show()
```

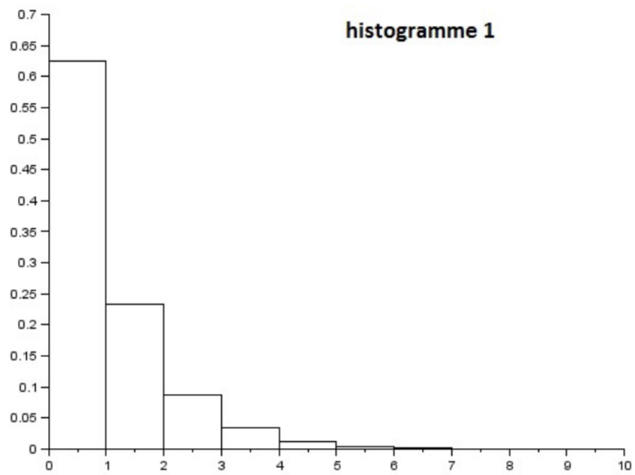
Chacun de ces scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, ... , $]9,10]$, et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle vaut 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi exponentielle de paramètre 1, renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Y_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.

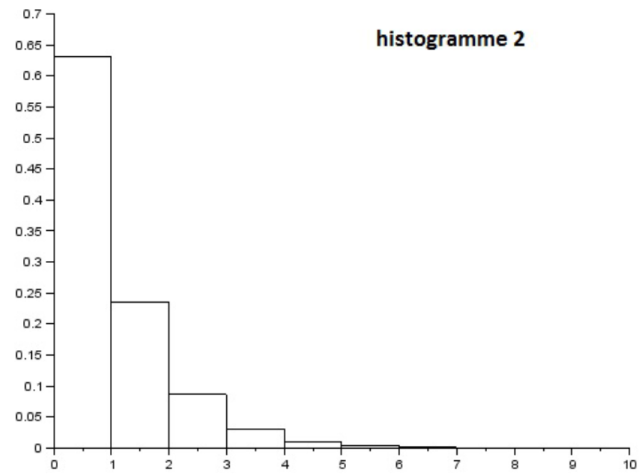
a. Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires (Y_n) ?

b. Déterminer la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable Y_n.

c. Pour tout réel x positif ou nul, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x)$.

d. Démontrer le résultat conjecturé à la question a).





Exercice 6 (en utlisant le TCL, d'après HEC 1999)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi de Poisson de paramètre 1.
Pour tout entier naturel N non nul, on pose $Y_N = X_1 + \ldots + X_N$.
Calculer $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathrm{P}(Y_N \leq N)$.

Exercice 7 (Ecricome 2017)

Reprendre l'ex 2 du DS5 et rajouter une dernière question :
Démontrer alors que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

Théorème Limite Central

Exercice 8

121 personnes s'adressent à un même guichet de Sécurité Sociale pour se faire rembourser des frais de maladie. Soit X_k la somme versée à la $k-$ième personne. On sait, d'après des études statistiques, que l'espérance mathématique de X_k est de $m_{X_k} = 50$€ avec un écart-type de $\sigma_{X_k} = 30$€.
Le guichet dispose au total de 6545 euros. Calculer la probabilité pour que cette somme d'argent suffise à rembourser les 121 personnes. (on se servira d'une table de loi centrée réduite)

Exercice 9 (Approximat° d'une loi binomiale et problématique de correct° de continuité qd n n'est "pas si gd")

Dans une population, on suppose que la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est 0,5. On cherche la probabilité pour que, sur 64 naissances, il y ait au moins 40 filles.
On utilisera une table de loi normale centrée réduite.

Exercice 10 (Approximat° d'une loi de Poisson et problématique de correct° de continuité qd n n'est "pas si gd")

Le nombre d'incidents survenant chaque semaine sur un certain appareil dans une entreprise est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,5$. On demande de calculer la probabilité qu'il y ait 20 incidents en un an. On admet que le nombre d'incidents dans une semaine donnée est indépendant de celui des autres semaines (ce qui est vérifié si par exemple l'appareil est testé tous les lundi matin) et que l'entreprise est fermée pendant les deux semaines de fêtes de fin d'année. On considérera pour chaque semaine une variable aléatoire X_i. On appellera Y le nombre d'incidents en un an.
On utilisera une table de loi normale centrée réduite.