Loi faible des grands nombres, Théorème Limite Central, cv en loi
Éléments de correction

Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec F_n la variable aléatoire représentant la fréquence du nombre de pile $F_n = \frac{X_n}{n}$, avec X_n le nombre de pile observés. X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $1/2$ donc F_n est une variable aléatoire d'espérance $\frac{1}{2}$ et de variance $\frac{1}{4n}$, elle vérifie les conditions d'application de l'inégalité et on obtient : $\mathrm{P}(\left|F_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

Exercice 2 (d'après EDHEC 2017, voie S)

0. Réponses brutes à rédiger : On montre que la fonction de répartition de M_n est $F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x<0 \\ x^n & \text{, si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{, si } x>1 \end{cases}$

Puis qu'une densité f_{M_n} de M_n est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x<0 \\ nx^{n-1} & \text{, si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{, si } x>1 \end{cases}$

Les intégrales permettant de calculer l'espérance et le moment d'ordre 2 de M_N sont des intégrales de fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et ne posent donc pas de difficulté.

1. M_n admettant un moment d'ordre 2, $(M_n-1)^2$ admet une espérance et est positive, on peut donc appliquer l'inégalité de Markov à $(M_n-1)^2$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left((M_n-1)^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{E\left((M_n-1)^2\right)}{\varepsilon^2}$$

Or, par linéarité de l'espérance,

$$E\left((M_n-1)^2\right) = E(M_n^2) - 2E(M_n) + 1 = \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

et donc

<u>**Conclusion**</u> **:**

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad P\left((M_n-1)^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2}}$$

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2} = 0$, donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left((M_n-1)^2 \geqslant \varepsilon^2\right) = 0$. Or, $((M_n-1)^2 \geqslant \varepsilon^2) = (|M_n-1| \geqslant \varepsilon)$, on peut donc conclure.

<u>**Conclusion**</u> **:**

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|M_n-1| \geqslant \varepsilon) = 0}$$

Convergence en loi

Exercice 3

Pour tout entier naturel k, $\mathrm{P}(X_n = k) = \frac{1}{n^k k!} e^{-\frac{1}{n}}$ en notant X la variable certaine égale à 0, on a $\mathrm{P}(X=0) = 1$ et $\mathrm{P}(X=k) = 0$ pour $k \neq 0$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = 0) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$ puisque $n^0 \times 0! = 1$ et par simple composition de limites de référence.

et pour tout k naturel **non nul**, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k k!} e^{-\frac{1}{n}} = 0$

Donc (X_n) converge bien en loi vers la variable certaine égale à 0.

Exercice 4 (d'après EDHEC 2013)

G_n est bien définie sur $\left]\frac{1}{2n}; +\infty\right[$ car $1 - \frac{1}{2nx} > 0$ sur cet intervalle.

Pour x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, puisque $\frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel $\frac{1}{2n} < x$.

Donc pour tout x, pour n suffisamment grand, $G_n(x) = (1 - \frac{1}{2nx})^n$.

Pour étudier cette limite classique, il faut penser à passer au ln, trouver un équivalent puis une limite, puis repasser à l'exponentielle dans cette limite en invoquant la continuité de l'exponentielle (se référer à l'item 7 de l'ex1 du TD6 ou à la démo l'ex 7 du cours).

On trouve alors que $G_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2x}}$.

En posant $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ e^{-\frac{1}{2x}} & \text{si } x>0\end{cases}$

On prouve alors que F est croissante, de limite nulle en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, qu'elle est C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (preuves laissés au lecteur) et on a donc la réponse car la fonction limite F est bien la fonction de répartition d'une var à densité Y.

Exercice 5 (d'après EDHEC 2017, voie S)

1. Dans le programme proposé, X est une réalisation de n variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. M_n peut alors être simulée à l'aide de la fonction max :

```
def f(n):
    X=rd.random(n)
    Y=n*(1-np.max(X))
    return Y
```

2. **a.** Les deux histogrammes sont très proches, les simulations de Y_n sont donc prochent des simulations d'une loi exponentielle de paramètre 1.
   Conclusion :

   $\boxed{\text{On peut conjecturer que } (Y_n) \text{ converge en loi vers une variable de loi exponentielle de paramètre } 1.}$

   b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,
   $$F_{Y_n}(x)=P(Y_n\leqslant x)=P(n(1-M_n)\leqslant x)=P\left(M_n\geqslant 1-\frac{x}{n}\right)=1-F_{M_n}\left(1-\frac{x}{n}\right)$$
   La dernière égalité étant vraie car M_n est à densité.
   Et avec la question 0 de l'ex 2 :
   Conclusion :
   $$\boxed{F_{Y_n}(x)=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{, si } 1-\frac{x}{n}<0\Leftrightarrow x>n\\ 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{, si } 0\leqslant 1-\frac{x}{n}\leqslant 1\Leftrightarrow 0\leqslant x\leqslant n\\ 0 & \text{, si } 1-\frac{x}{n}>1\Leftrightarrow x<0\end{array}\right.}$$

   c. Soit $x\geqslant 0$. Pour $n\geqslant x$, on a d'après 2.a.,
   $$F_{Y_n}(x)=1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=e^{-x}$. En effet, $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{x}{n}$, donc $n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-x$, ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)=-x$. Reste alors à utiliser la continuité de la fonction exponentielle pour obtenir ce qui était annoncé.
   Conclusion :
   $$\boxed{\text{Pour tout } x\geqslant 0,\ \lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=1-e^{-x}.}$$

   d. Pour tout $x<0$, $F_{Y_n}(x)=0$ et avec 3.(b), on peut conclure que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x)$ tend, quand $n\to+\infty$, vers la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.
   Conclusion :

   $\boxed{(Y_n) \text{ converge en loi vers une variable de loi exponentielle de paramètre } 1.}$

Exercice 6 (en utlisant le TCL, d'après HEC 1999)

Pour $N\in\mathbb{N}^*$, (X_n) est une suite de variables mutuellement indépendantes et pour $i\in[\![1,N]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre 1.

Par stabilité, on a alors que Y_n suit la loi de Poisson de paramètre $\sum\limits_{i=1}^{N}1=N$.

On sait alors que $\mathrm{E}(Y_N)=N$ et $V(Y_N)=N\neq 0$.

Comme les variables $X_1,\ldots,X_N$ sont mutuellement indépendantes, et de même loi, on applique le théorème limite central et $\dfrac{Y_N-\mathrm{E}(Y_n)}{\sqrt{V(Y_N)}}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\mathrm{P}\left(\dfrac{Y_N-\mathrm{E}(Y_n)}{\sqrt{V(Y_N)}}\leq x\right)=\Phi(x)$.

Pour $x=0$, $\lim\limits_{N\to+\infty}\mathrm{P}\left(\dfrac{Y_N-\mathrm{E}(Y_n)}{\sqrt{V(Y_N)}}\leq 0\right)=\Phi(0)=\frac{1}{2}$

et comme $\sqrt{N}>0$, on conclut $\lim\limits_{N\to+\infty}\mathrm{P}(Y_N\leq N)=\frac{1}{2}$

Théorème Limite Central et approximations usuelles

Exercice 8

Soit $X = \sum_{k=1}^{121} X_k$ avec les X_k mutuellement indépendants (les 121 personnes ayant des remboursements indépendants les uns des autres.)

$\mathrm{E}(X_k) = 121 \times 50 = 6050$ et $\mathrm{V}(X_k) = 121 \times (30)^2 = (11 \times 30)^2 = 330^2$ donc $\sigma = 330$.

Sans aucune autre information sur la loi des X_k, le nombre de termes étant assez grand (121 bien plus grand que 30), on peut appliquer le théorème central limite et la loi de X est proche d'une loi normale.

La probabilité cherchée est alors donnée par $\mathrm{P}(X < 6545) = \mathrm{P}\big(X^* < \frac{6545-6050}{330}\big) \simeq \mathrm{P}(Y < \frac{495}{330})$. avec $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Or puisque $\frac{495}{330} = \frac{45\times 11}{3\times 11\times 10} = \frac{3\times 3\times 5}{3\times 2\times 5} = \frac{3}{2} = 1,5$. Il suffit maintenant de chercher dans la table de la loi normale pour trouver $\Phi(1,5) \simeq 0,9332$.

Pour conclure, il y a donc environ 93% de chances que la somme suffise à rembourser les 121 personnes.

Exercice 9 (Approximat° d'une loi binomiale et problématique de correct° de continuité qd n n'est "pas si gd")

On appelle Y le nombre de filles parmi les 64 naissances. La variable Y suit la loi $\mathscr{B}(64,1/2)$. On a $np = n(1-p) = 32$ et $n = 64$ donc les paramètres de la loi sont suffisamment grands pour appliquer la propriété d'approximation de la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$, de sorte que :

$\mathrm{P}(\boldsymbol{Y \geq 40}) = \mathrm{P}(\boldsymbol{Y \geq 39,5}) \simeq \mathrm{P}(U \geq 39,5)$ où $U \hookrightarrow \mathcal{N}(32,16)$.

donc $\mathrm{P}(Y \geq 40) \simeq \mathrm{P}\big(Z \geq \frac{39,5-32}{\sqrt{16}}\big) = \mathrm{P}\big(Z \geq \frac{15}{8}\big)$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

or $\frac{15}{8} \simeq 1,875$ donc en lisant dans la table de la loi normale centrée réduite, on trouve que $\Phi(1,87) = \mathrm{P}(Z \leq 1,87) \simeq 0,9693$ et $\Phi(1,88) = \mathrm{P}(Z \leq 1,88) \simeq 0,9699$ donc au centième près on a $\Phi(1,875) \simeq 0,97$.

Au final $\mathrm{P}(Y \geq 40) \simeq 1 - \Phi(1,875) \simeq 0,03$.

Sur 64 naissances, il y a donc environ 3% de chances qu'il y ait plus de 40 naissances de filles.