Estimation - éléments de correction

Estimation ponctuelle

Exercice 1 (élémentaire et incontournable)

Soit X une variable suivant une loi de Bernoulli de paramètre p inconnu. Pour n entier naturel non nul, on désigne par $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On note $\overline{X_n}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

1. Il s'agit d'une variable aléatoire réelle fonction des n variables aléatoires du n-échantillon et indépendante de p. C'est dont un estimateur de p.
2. $\mathrm{E}(\overline{X_n})=\frac{\mathrm{E}(X_1)+\cdots+\mathrm{E}(X_n)}{n}$ par linéarité de l'espérance. Mais comme chaque X_i a pour espérance p, il vient que $\mathrm{E}(\overline{X_n})=\frac{np}{n}=p$

Exercice 2 (Pour voir un peu toutes les notions de l'estimation ponctuelle sur un exemple simple)

1. $\mathrm{E}\big(\overline{X_n}\big)\underset{\text{lin. de E}}{=}\frac{\mathrm{E}(X_1)+\cdots+\mathrm{E}(X_n)}{n}=\frac{n\mathrm{E}(X)}{n}=\mathrm{E}(X)=-1\times p+0\times(1-2p)+1\times p=-p+p=0$
2. $\mathrm{E}(aX_n+b)=a\mathrm{E}(X_n)+b=b$ par linéarité de l'espérance.
   Donc la seule manière de trouver un tel estimateur sans biais de choisir $b=p$ et a quelconque, ce qui est impossible parce qu'alors la variable aX_n+p dépend de p, ce qui est impossible pour un estimateur. Il n'est donc pas possible de répondre à cette problématique.
3. ▪ $\mathrm{E}(T_n)\underset{\text{lin. de E}}{=}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\big(X_i^2\big)=\frac{n\mathrm{E}(X^2)}{2n}=\frac{\mathrm{E}(X^2)}{2}$
   Puisque les X_i^2 suivent tous les même loi que X^2. Déterminons cette loi. $X^2(\Omega)=\{0;1\}$ X^2 suit donc une loi de Bernoulli
   Comme $\mathrm{P}(X^2=0)=\mathrm{P}(X=0)=1-2p$ on a $\mathrm{P}(X^2=1)=1-\mathrm{P}(X^2=0)=2p$ donc $X^2\hookrightarrow\mathscr{B}(2p)$
   D'où $\mathrm{E}(T_n)=\frac{2p}{2}=p$ donc T_n est un estimateur sans biais de p.
   ▪ Les X_i étant indépendants, il en sera de même des X_i^2.
   $\mathrm{V}(T_n)=\frac{1}{4n^2}\mathrm{V}\Big(\sum_{k=1}^{n}X_i^2\Big)\underset{\text{ind. des }X_i}{=}\frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{V}(X_i^2)=\frac{n\mathrm{V}(X^2)}{4n^2}=\frac{2p(1-2p)}{4n}=\frac{p(1-2p)}{2n}$ car $X^2\hookrightarrow\mathscr{B}(2p)$ donc $\mathrm{V}(X^2)=2p(1-2p)$
   ▪ Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à T_n (licite car T_n admet une espérance) :
   Pour tout $\varepsilon>0$, $\mathrm{P}\big(|T_n-\mathrm{E}(T_n)|\geq\varepsilon\big)\leq\frac{\mathrm{V}(T_n)}{\varepsilon^2}$
   en remplaçant par les valeurs calculées ci-dessus : $\varepsilon>0$, $\mathrm{P}\big(|T_n-p|\geq\varepsilon\big)\leq\frac{p(1-2p)}{2n\varepsilon^2}$
   Par le théorème des gendarmes, $\frac{p(1-2p)}{2n\varepsilon^2}$ convergeant vers 0 quand $n\to+\infty$, il en est de même pour $\mathrm{P}\big(|T_n-p|\geq\varepsilon\big)$, ce qui signifie que T_n est un estimateur convergent de p.

Exercice 3

Soit X une v.a.r de variance σ^2. $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de v.a.i.i.d de même loi que X, $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ et $T_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\big(X_i-\overline{X_n}\big)^2$.

$$T_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X_n}\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{X_n}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X_n}^2+n\overline{X_n}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X_n}^2\right)$$

Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(T_n)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^2)-n\mathrm{E}\big(\overline{X_n}^2\big)\right)$.

Grâce à K-H : $\mathrm{E}(T_n)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(\mathrm{V}(X_i)+\big(\mathrm{E}(X_i)\big)^2\Big)-n\left(\mathrm{V}\big(\overline{X_n}\big)+\Big(\mathrm{E}\big(\overline{X_n}\big)\Big)^2\right)\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+m^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+m^2\right)\right)=\ldots=\sigma^2$

Exercice 4 (Un autre incontournable : Estimateur du maximum de vraisemblance : cas de la loi de Poisson)

Soit $X_1,\dots,X_n$ des v.a.i.i.d suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ et $f_{x_1,\dots,x_n}(\lambda)=\mathrm{P}(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)$

1. $f_{x_1,\dots,x_n}(\lambda)=\mathrm{P}(X_1=x_1)\times\ldots\mathrm{P}(X_n=x_n)$ par mutuelle indépendance des X_k.
   En posant $s=x_1+\ldots+x_n$, $f_{x_1,\dots,x_n}(\lambda)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{x_1}}{x_1!}\times\ldots\times e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{x_n}}{x_n!}=e^{-n\lambda}\dfrac{\lambda^s}{x_1!\ldots x_n!}$
2. $\frac{1}{x_1!\ldots x_n!}$ étant une constante de λ, il s'agit de trouver le maximum de la fonction $g_{x_1,\dots,x_n}$ définie par $g_{x_1,\dots,x_n}(\lambda)=e^{-n\lambda}\lambda^s$.
   Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ par opérations sur les fonctions usuelles et pour tout $\lambda>0$:
   $g'_{x_1,\dots,x_n}(\lambda)=-ne^{-n\lambda}\lambda^s+se^{-n\lambda}\lambda^{s-1}=e^{-n\lambda}\lambda^{s-1}(-n\lambda+s)$, qui est du même signe que $-n\lambda+s$.
   On en déduit facilement que la fonction $g_{x_1,\dots,x_n}$ et par suite la fonction $f_{x_1,\dots,x_n}$ admet un unique maximum et que ce maximum est atteint pour $\lambda=\frac{s}{n}=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.
   Le maximum de vraisemblance est ici aussi obtenu pour la moyenne empirique.

Exercice 5 (Estimation de la variance)

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon d'une v.a. X admettant pour espérance m et pour variance σ^2.

1. Fait en classe. On se sert de la linéarité de l'espérance et de la définition de la variance et on trouve que $\mathrm{E}(T_n)=\sigma^2$
2. $\overline{S_n}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2$ et m n'est pas connu.
   - **a.** Pour tout $i\in[\![1]\!]n$, $\mathrm{E}((X_i-\overline{X_n})^2)=\mathrm{V}(X_i-\overline{X_n})+\big(\mathrm{E}(X_i-\overline{X_n})\big)^2=\mathrm{V}(X_i-\overline{X_n})$
     En effet $\mathrm{E}(X_i-\overline{X_n})=0$ car $\mathrm{E}(X_i)=\mathrm{E}(\overline{X_n})$ et l'espérance est linéaire
   - **b.** On ajoute et retranche m dans le carré :
$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big(\big((X_i-m)-(\overline{X_n}-m)\big)^2\Big)&=\mathrm{E}\big((X_i-m)^2-2(X_i-m)(\overline{X_n}-m)+(\overline{X_n}-m)^2\big)\\&=\mathrm{E}\big((X_i-m)^2\big)-2\mathrm{E}\big((X_i-m)(\overline{X_n}-m)\big)+\mathrm{E}\big((\overline{X_n}-m)^2\big)\\&=\mathrm{V}(X_i)-2\mathrm{E}\big((X_i-m)(\overline{X_n}-m)\big)+\mathrm{V}(\overline{X_n})\end{aligned}$$
   - **c.** Alors
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{S_n}^2)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i)-2\mathrm{E}\big((X_i-m)(\overline{X_n}-m)\big)+\mathrm{V}(\overline{X_n})\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\big((X_i-m)(\overline{X_n}-m)\big)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma^2}{n}\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\big((X_i-m)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)\big)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma^2}{n}\\&=\sigma^2-\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\big((X_i-m)^2\big)+\frac{\sigma^2}{n}\\&=\sigma^2-\frac{2}{n^2}\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2\end{aligned}$$

     $\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2$ est donc un estimateur sans biais de σ^2.

Exercice 6 (Convergence d'un estimateur)

Soit a un réel strictement positif. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \frac{3a^3}{x^4} & \text{si } x\geq a\end{cases}$

1. Vérifier les trois points pour la densité $\mathrm{E}(T)=\frac{3a}{2}$ et $\mathrm{V}(T)=\frac{3a^2}{4}$.
2. - **a.** Après rédaction , on trouve : pour tout $x<a$, $F(x)=0$ si $x\geq a$, $F(x)=1-\left(\frac{a}{x}\right)^3$
   - **b.** $\mathrm{P}(T>2a)=\frac{1}{8}$
     $\mathrm{P}_{(T>2a)}(T>6a)=\frac{\mathrm{P}\big((T>2a)\cap(T>6a)\big)}{\mathrm{P}(T>2a)}=\frac{\mathrm{P}(T>6a)}{\mathrm{P}(T>2a)}=\frac{\frac{1}{6^3}}{\frac{1}{2^3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.
3. Z_n est une variable aléatoire réelle fonction des n variables aléatoires du n-échantillon et indépendante de a. C'est dont un estimateur de a.
   $\mathrm{E}(Z_n)=\ldots=a$. $\mathrm{V}(Z_n)=\ldots=\frac{a^2}{3n}$
   On en déduit d'après l'inégalité de B-T, dont les hypothèses sont vérifiées puisque Z_n aussi que $\mathrm{P}\big(|Z_n-a|\geq\varepsilon\big)\leq\frac{a^2}{3n\varepsilon^2}$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{P}\big(|Z_n-a|\geq\varepsilon\big)=0$ par application du théorème des gendarmes donc cet estimateur est convergent.

Estimation par intervalle de confiance

Exercice 8

On suppose que la charge maximale supportée par un câble, exprimée en tonnes, est une v.a. qui suit une loi normale d'écart-type 0,5 et de moyenne inconnue. Une étude portant sur 50 câbles a donné une moyenne des charges maximales supportées de 12,2 tonnes.

1. La charge maximale moyenne de tous les câbles est la moyenne de toutes les charges max, c'est-à-dire μ. Ici $\alpha=0,01$. La variable $Z=\frac{\overline{X_n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. On cherche dans les tables t_α tel que $\mathrm{P}(|Z|\leq t_\alpha)=1-\alpha$. Dans les tables, on trouve $\Phi^{-1}(0,995)\simeq 2,576$. Donc $\mathrm{P}(\overline{X_n}-t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\overline{X_n}+t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=1-\alpha$, et un intervalle de confiance est ainsi obtenu. Numériquement, $x_n=12,2$ et $\mu=50$. On trouve quelque chose comme $[12,02\ ;\ 12,38]$.

2. L'amplitude de l'intervalle de confiance étant $2t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \simeq \frac{2,576}{\sqrt{n}} \leq 0,2$ pour $n \geq 166$

Exercice 9

Lors d'un sondage pré-électoral, 1000 électeurs choisis au hasard ont été interrogés. 520 d'entre eux se sont déclarés favorables à Mme Durand.

1. Modélisons le problème : on choisit un électeur au hasard dans la population. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si l'électeur compte voter pour Mme Durand et 0 sinon. Alors $\mathrm{P}(X=1)=p$, proportion d'électeurs favorables à Mme Durand dans la population. Donc X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
   On dispose d'un n-échantillon de taille 1000 ($n=1000$) $X_1,\dots,X_n$ de loi-mère celle de X (autrement dit de 1000 v.a. de Bernoulli de paramètre p indépendantes.)
   On sait que $\overline{x}=52/100$: la proportion d'électeurs favorables observée sur l'échantillon est de 52%.
   Posons $S_n = X_1+\dots+X_n$ le nombre d'électeurs favorables à Mme Durand dans l'échantillon et $F_n=\overline{X_n}=\frac{S_n}{n}$ la proportion d'électeurs favorables à Mme Durand.
   S_n est une somme de v.a. de Bernoulli, que l'on suppose indépendantes (un électeur n'influence pas les autres), de même paramètre p, donc S_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
   Donc $\mathrm{E}(S_n)=np$ et $\mathrm{V}(S_n)=np(1-p)$
   Sous de bonnes hypothèses, (n assez grand et p pas trop proche de 0 ou de 1, on peut approcher $\mathscr{B}(n,p)$ par une loi $\mathscr{N}(np,np(1-p))$. On a donc, sous ces hypothèses, $\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ ou encore $\frac{F_n-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ converge en loi vers $\mathscr{N}(0,1)$.
   De plus, on cherche dans les tables la valeur de $t_{0,05}=1,96$. On en déduit que $\mathrm{P}\left(-1,96\leq \frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq 1,96\right)\simeq 0,95$
   Par manipulation d'encadrements, on obtient $\mathrm{P}\left(F_n-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leq p\leq F_n+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)\simeq 0,95.$
   Mais puisque p ne doit pas intervenir dans les bornes de l'intervalle, on utilise la majoration classique de $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$ pour p dans $[0,1]$.
   et pour finir, on trouve, comme intervalle de confiance asymptotique : $[F_n-\frac{1,96}{2\sqrt{n}};F_n+\frac{1,96}{2\sqrt{n}}]$.
   En prenant les valeurs numériques de l'exercice, l'intervalle de confiance est $[0,489;0,551]$. Ce qui ne permet pas de savoir si Mem Durand sera élue ou pas !
2. Pour pouvoir savoir si Mme Durand serait élue avec une telle fréquence observée, il aurait fallu un intervalle de confiance d'amplitude inférieure à 0,02. la longueur de l'intervalle de confiance étant de $\frac{1,96}{\sqrt{n}}$, il faudrait $n\geq 9604$. Il faut donc interroger au moins 9604 électeurs pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure à 0,02 au seuil de 0,95 et pouvoir affirmer (avec un risque de 5% d'erreur) que Mme Durand sera élue.

Exercice 11 (EDHEC 2012)

1. **a.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=\lambda|-x|e^{-\lambda(-x)^2}=\lambda|x|e^{-\lambda x^2}=f(x)$, donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$
   NB : le fait que la densité soit paire influencera toute la suite de l'exercice !
   En effet, la parité simplifie les problèmes de convergence et le calcul d'intégrales sur $\mathbb{R}$. De plus, f étant paire, $x\mapsto xf(x)$ est impaire, $x\mapsto x^2f(x)$ est paire, ...

   b. Soit $A>0$.
$$\begin{aligned}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{e^{-\lambda x^2}}{2}\right]_0^A\\ &= \frac{1-e^{\overbrace{-\lambda A^2}^{\to-\infty \text{ car } \lambda>0}}}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2,\end{aligned}$$
   donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $1/2$.

   c.
   - f est positive sur $\mathbb{R}$ (car $\lambda>0$).
   - f est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles.
   - Comme f est paire et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$.
   - f est donc bien une densité de probabilité.

2. **a.** ▶ $x \mapsto x f(x)$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

Pour tout $x \geq 1$, $\frac{x f(x)}{1/x^2} = \lambda x^4 e^{-\lambda x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées), donc $x f(x) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (Riemann et $2 > 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi.

▶ De plus, $x \mapsto x f(x)$ est continue sur $[0,1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

▶ Par suite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

b. Comme $x \mapsto x f(x)$ est impaire (produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, $\displaystyle\int_{+\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

Donc $\boxed{X \text{ admet une espérance et } \mathsf{E}(X) = 0.}$

3. **a.** Soit $A > 0$.

Posons $u'(x) = \lambda x e^{-\lambda x^2}$, $u(x) = -\frac{e^{-\lambda x^2}}{2}$, $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$.

Alors, comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$, on peut intégrer par parties, et

$$\begin{aligned}
\int_0^A x f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A x^2 \lambda x e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^2 e^{-\lambda x^2}}{2}\right]_0^A + \int_0^A x e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{A^2 e^{-\lambda A^2}}{2} + \left[-\frac{e^{-\lambda x^2}}{2\lambda}\right]_0^A \\
&= -\underbrace{\frac{A^2 e^{-\lambda A^2}}{2}}_{\to 0 \text{ par croissances comparées}} - \underbrace{\frac{e^{-\lambda A^2}}{2\lambda}}_{\to 0} + \frac{1}{2\lambda} \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\lambda},
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } \frac{1}{2\lambda}.}$

b. Comme $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire (produit de fonctions paires) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$.

Par suite, X admet un moment d'ordre 2 $\left(\mathsf{E}(X^2) = 1/\lambda\right)$, donc une variance et

$$\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}(X^2) - (\mathsf{E}(X))^2 \boxed{= \frac{1}{\lambda}.}$$

4. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_Y(x) &= \mathrm{P}(Y \leq x) \\
&= \mathrm{P}(X^2 \leq x) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathsf{F}_X(\sqrt{x}) - \mathsf{F}_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

b. *Le fait que Y soit une variable à densité est admis par l'énoncé. Il est donc inutile de le redémontrer !*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
f_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \lambda |\sqrt{x}| e^{-\lambda(\sqrt{x})^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} |-\sqrt{x}| e^{-\lambda(-\sqrt{x})^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

On reconnaît la densité d'une loi exponentielle de paramètre λ, donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda).}$

c. Comme $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, Y admet une espérance et $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$.
Par suite, comme $Y = X^2$, $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{\lambda}$. donc $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{1}{\lambda}$.

5. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_W(x) &= \mathrm{P}(W \leq x) \\
&= \mathrm{P}\left(-\tfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right) \\
&= \mathrm{P}(\ln(1-U) \geq -\lambda x) \\
&= \mathrm{P}(1-U \geq e^{-\lambda x}) \\
&= \mathrm{P}(U \leq 1-e^{-\lambda x}) \\
&= \mathrm{F}_U(1-e^{-\lambda x}) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 1-e^{-\lambda x} < 0 \Leftrightarrow -\lambda x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\\ 1 & \text{si } 1-e^{-\lambda x} \geq 1 \iff e^{-\lambda x} \leq 0 \text{ (imposs.)} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ, donc $W \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

b. On sait simuler une loi uniforme sur $[0,1[$ (avec l'instruction `random`). On peut alors simuler une loi $\mathscr{E}(\lambda)$ (avec la question précédente), et donc la loi de $Y = X^2$.
Il ne restera alors plus qu'à prendre la racine carrée pour simuler la loi de $|X|$.
D'où la fonction suivante :

```
def vax(lambda):
    u = rd.random()
    return np.sqrt(-np.log(1-u) / lambda)
```

c. $\mathrm{P}(X \geq 0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1/2$ (question 1.b), et donc $\mathrm{P}(X < 0) = 1 - \mathrm{P}(X \geq 0) = 1/2$. cqfd.
Par suite, on peut décider que,

- si `rd.randint(0,2) == 0`, alors X prend une valeur négative, et donc $X = -|X|$,
- et, si `rd.randint(0,2) == 1`, alors X prend une valeur positive, et donc $X = |X|$.

D'où le programme suivant :

```
def Simulx(lambda):
    b = rd.randint(0,2)
    if b == 0 :
        a = -vax(lambda)
    else :
        a = vax(lambda)
    return a
```

6. **a.** Pour tout $\lambda > 0$,

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k) = \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_k} = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

et

$$\ln(L(\lambda)) = n\ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

b. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda) = \tfrac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k > 0 &\Leftrightarrow \tfrac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k > 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda < \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k} = z.\end{aligned}$$

On en tire le tableau de variations suivant :

λ	0		z		$+\infty$
$\varphi'(\lambda)$		$+$	0	-	
$\varphi(\lambda)$		$\nearrow$	$\varphi(z)$	$\searrow$	

Par suite, φ admet un maximum en $\boxed{z = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}.}$

Comme $L(\lambda) = \exp(\ln(L(\lambda)) = \exp(\varphi(\lambda))$, où exp est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, L admet un maximum en z.

7. **a.** Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Alors on a $Z_n = \frac{n}{S_n}$.

D'après le théorème de transfert, $Z_n = \frac{n}{S_n}$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{n}{t} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Or, comme f_n est nulle sur $]-\infty,0[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \tfrac{n}{t} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

De plus, pour tout $t > 0$, $\frac{n}{t} f_n(t) = \frac{n}{t}\frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} = \frac{n\lambda}{n-1} f_{n-1}(t)$, donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \tfrac{n}{t} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{n\lambda}{n-1}\int_{0}^{+\infty} f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{n\lambda}{n-1}\cdot 1 = \frac{n\lambda}{n-1}$.

Par suite, Z_n admet une espérance et $\boxed{\mathrm{E}(Z_n) = \frac{n\lambda}{n-1}.}$

b. Soit $Z'_n = \frac{n-1}{n} Z_n$.
Alors, comme $\mathrm{E}(Z'_n) = \frac{n-1}{n}\mathrm{E}(Z_n) = \lambda$, Z'_n est un estimateur sans biais de λ.