Chapitre 8 - Suites de variables aléatoires

1 Généralités sur les v.a.r.d.

Définition : Vecteurs aléatoires

On appelle **vecteur aléatoire** tout n-uplet de variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
On dit que le vecteur aléatoire est discret si toutes ses composantes sont discrètes.

Définition : Loi conjointe

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
La **loi conjointe** de X est donnée par l'application :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) \end{array} \right. .$$

Définition : Lois marginales

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, la **loi marginale** de X_k est donnée par l'application :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_k(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x_k & \mapsto & \mathbb{P}(X_k = x_k]) \end{array} \right. .$$

Proposition

Soient X un vecteur aléatoire et $g : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$. On définit $Z = g(X_1, \dots, X_n)$ par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = g(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

Z est une v.a.r.d.

Exemples : somme, minimum, maximum

2 Indépendance

Définition : Indépendance de n v.a.r.d.

Les variables X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i] \right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Remarque : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.
La réciproque est fausse.

Définition : Indépendance d'une suite de v.a.r.d.

Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a.r.d. est dite mutuellement indépendante lorsque pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, les variables $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition : Lemme des coalitions

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire, $f : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_p(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : X_{p+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
Si $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indépendants, alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Exemple : stabilité de la loi binomiale et de la loi de Poisson pour des sommes de n v.a.r. mutuellement indépendantes.

3 Espérance et variance

Proposition : Linéarité de l'espérance

Si X_1, ..., X_n sont des v.a.r. admettant une espérance alors leur somme admet une espérance et $E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$.

Proposition : Variance d'une somme

Si X_1, ..., X_n sont des v.a.r. **mutuellement indépendantes** admettant une variance alors leur somme admet une variance et :
$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$.

4 Un peu de formalisme pour plus tard

4.1 Indépendance

Définition : Indépendance de 2 v.a.r.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles (pas nécessairement discrètes). X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout couple d'intervalles (I, J) :

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}(X \in I)\mathbb{P}(Y \in J)$$

Remarque : Cela implique en particulier que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y)$$

Définition : Indépendance de n v.a.r.

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire (pas nécessairement discret). Les (X_k) sont mutuellement indépendants si et seulement si pour tout n-uplet d'intervalles $(I_1, \dots, I_n)$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X \in I_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \in I_k).$$

Définition : Indépendance d'une suite de v.a.r.d.

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a.r.d. est dite mutuellement indépendante lorsque pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, les variables $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition : Lemme des coalitions

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire, $f : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_p(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : X_{p+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$.
Si $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indépendants et **si** $f(X_1, \dots, X_p)$ **et** $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ **sont des v.a.r.**, alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

4.2 Espérance et variance

Proposition : Linéarité de l'espérance

Si X_1, ..., X_n sont des v.a.r. admettant une espérance alors leur somme admet une espérance et $E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$.

Proposition : Variance d'une somme

Si X_1, ..., X_n sont des v.a.r. **mutuellement indépendantes** admettant une variance alors leur somme admet une variance et :
$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$.

Proposition : Espérance d'un produit

Si X_1, ..., X_n sont des v.a.r. **mutuellement indépendantes** admettant une espérance alors leur produit admet une espérance et :
$E(X_1 \times \cdots \times X_n) = E(X_1) \times \cdots \times E(X_n)$.