# Chapitre 9 - Variables aléatoires à densité

## 1 Généralités sur les variables à densité

### 1.1 Définition

**Définition : Variable aléatoire à densité**

Soit $X$ une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $F_X$ sa fonction de répartition. On dit que $X$ est une variable aléatoire à densité si sa fonction de répartition est :

- continue sur $\mathbb{R}$ ;
- de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

**Exemple :**

$$F_X : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{5} & \text{si } x \in [0,5] \\ 1 & \text{si } x > 5 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

**Définition : Densité d'une variable aléatoire à densité**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité et soit $F_X$ sa fonction de répartition. On appelle **densité** de $X$ toute fonction $f_X$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f_X(x) = F_X'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf éventuellement un nombre fini de points.

**Exemple :**

$$f_X : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x \in [0,5] \\ 0 & \text{si } x > 5 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

**Proposition**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité. Soient $F_X$ sa fonction de répartition et $f_X$ une densité de $X$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t.$$

**Remarque :** En conséquence $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1$.

### 1.2 Caractérisation et propriétés

**Proposition : Caractérisation de la fonction de répartition**

Toute fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $F$ est croissante sur $\mathbb{R}$ ;
- $F$ est continue sur $\mathbb{R}$ ;
- $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points ;
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ ;
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ;

est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

**Exemple :** $F(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. $F$ est une fonction de répartition à densité.
**Remarque :** Il existe des variables qui ne sont ni discrètes ni à densité.

**Proposition : Caractérisation de la densité**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. $f$ est une densité d'une variable aléatoire à densité si et seulement si :

- $f$ est positive sur $\mathbb{R}$,
- $f$ continue sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points,
- $f$ vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

**Exemple :** $f$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ pour $x \geq 0$ et nulle ailleurs.
**Remarque :** On dira plus simplement que $f$ est une densité.

**Proposition : Régularité des fonctions de répartition**

Si $f$ est une densité. Alors $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ en tout point où $f$ est continue. En un tel point $x_0$, on a $F'(x_0) = f(x_0)$.

**Proposition : Calculs de probabilité**

$$\text{Si } a \leqslant b, \quad \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\mathrm{d}t.$$

**Exemple :** $\mathbb{P}(a \leq Z \leq b)$ pour $a < b$ avec la loi de l'exemple précédent.
**Remarque :** $\mathbb{P}(Z = a) = 0$.

# 2 Lois usuelles

**Loi uniforme sur $[0,1]$.**

- Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
- Densité : $f_X : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$.
- Fonction de répartition : $F_X : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$.

**Loi uniforme sur $[a,b]$.** $(a < b)$

- Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.
- Densité : $f_X : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$.
- Fonction de répartition : $F_X : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{array}\right. \end{array}\right.$.

**Loi exponentielle de paramètre $\lambda$.** $(\lambda > 0)$

- Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
- Densité : $f_X : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$.
- Fonction de répartition : $F_X : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$.
- Propriété : absence de mémoire.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^\star,\ \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \mathbb{P}(X > y).$$

  Cela **caractérise** la loi : toute v.a.r. à densité, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sans mémoire suit une loi exponentielle.

**Loi normale centrée réduite.**

- Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- Densité : $f_X : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}\right.$.
- Fonction de répartition : $F_X : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$.
- Propriété : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

**Loi normale (ou de Laplace-Gauss) de paramètres $\mu$ et $\sigma^2$.**

- Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Densité : $f_X : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{array}\right.$.
- Fonction de répartition : $F_X : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$.
- Propriété : une somme de variables suivant des lois normales mutuellement indépendantes suit encore une loi normale.

# 3 Fonctions d'une variable aléatoire

## 3.1 Transformations affines

**Exemples :**

- $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$. Déterminer une densité de $Y = 2X + 3$.
- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,5)$. Loi de $Y = -20X - 1$.

**Propriétés :**

- Si $a < b$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \Leftrightarrow Y = a + (b-a)XX \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.
- Si $a < b$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]) \Leftrightarrow Y = \frac{X-a}{b-a} \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
- Si $a \neq 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

## 3.2 Transformations quelconques

**Exemples :**

- $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Loi de $X^2$ ?
- $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Loi de $\ln(X)$ ?
- $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$. Loi de $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$ ?
- $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n+1[)$. Loi de $\lfloor X \rfloor$ ?

# 4 Moments des v.a.r. à densité

## 4.1 Espérance

**Définition : Espérance d'une variable aléatoire réelle à densité**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $f_X$ une densité de $X$. On dit que $X$ admet une espérance si l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$$

converge absolument. Dans ce cas, on appelle espérance de $X$ et on note $E(X)$ la valeur de cette intégrale.

**Exemples :**

- Espérance de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
- $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$. $Y$ admet une espérance.
- $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Pas d'espérance pour cette loi.

**Remarque :** On dit que $X$ est centrée si $E(X) = 0$.
**Propriétés :**

- Linéarité : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- Croissance : si $X \leq Y$ presque sûrement alors $E(X) \leq E(Y)$.

## 4.2 Théorème de transfert

**Théorème : Théorème de transfert**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle à densité. Soit $f_x$ une densité de $X$. On suppose que $f_X$ est nulle en dehors de $]a, b[$ où $a < b$ et $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. $E(\varphi(X))$ existe si et seulement si l'intégrale :

$$\int_{+\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

converge absolument. Dans ce cas, $E(\varphi(X))$ est la valeur de l'intégrale.

**Exemple :** Soit $X$ une variable aléatoire réelle à densité. On donne une densité de $X$ :

$$f_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

où $\lambda > 0$. Déterminer pour quelle valeur de $\lambda$, $Y = \mathrm{e}^X$ admet une espérance. La calculer le cas échéant.
**Corollaire :** $E(aX + b) = aE(X) + b$.

## 4.3 Moments d'ordre supérieur, variance

**Définition : Moments d'ordre $r$**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité $f_X$ et soit $r \in \mathbb{N}^\star$.
On dit que $X$ admet un moment d'ordre $r$ si $X^r$ admet une espérance.
D'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.

**Exemple :** Moments d'ordre 1 et 2 pour $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

**Définition : Variance**

Soit $X$ une v.a.r. de densité $f_X$ admettant une espérance. On dit que $X$ admet une variance si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. D'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.
Dans ce cas, la variance de $X$ est :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)\mathrm{d}x = E((X - E(X))^2).$$

**Exemples :**

- $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Calculer $V(X)$.
- $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Pas de variance pour cette loi.
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. Pas de variance pour cette loi.

**Remarques :**

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est appelé l'écart-type de $X$.
- On dit que $X$ est centrée réduite si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

**Propriétés :**

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

### 4.4 Lois usuelles

| Loi | Espérance | Variance |
|---|---|---|
| $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ | $E(X) = \frac{a+b}{2}$ | $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ |
| $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ | $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ | $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ |
| $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ | $E(X) = \mu$ | $V(X) = \sigma^2$ |

**Remarque :** Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$. Donc $X$ est centrée réduite.

## 5 Mathématiques approfondies

### 5.1 Loi usuelle supplémentaire

**Loi $\gamma$ de paramètres $\nu$.** $(\nu > 0)$

- Notation : $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$.
- Densité : $f_X : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \mathrm{e}^{-\nu} & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$ .
- Fonction de répartition : $F_X : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ .
- Propriété : $\gamma(1)$ et $\mathcal{E}(1)$ sont la même loi.
- Moments : $E(X) = \nu$ et $V(X) = \nu$.

### 5.2 Transformations de v.a.r.

**Proposition**

Soit $X$ une variable aléatoire à densité. Soit $g$ une fonction continue de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors $g(X)$ est encore une variable aléatoire réelle.

**Exemple :** Si $X$ est une variable aléatoire réelle, $X^2$, $\mathrm{e}^X$ et $aX + b$ sont encore des variables aléatoires réelles.
**Remarque :** Cela ne dit pas que la variable est encore à densité. Ce sera à montrer à chaque fois.

### 5.3 Transformations affines

**Proposition : Loi de $Y = aX + b$ avec $a > 0$**

Soient $X$ une v.a.r. à densité et $a, b \in R$ avec $a > 0$. $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité et pour tout $y \in \mathbb{R}$ :

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \text{ et } f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

**Proposition : Loi de $Y = aX + b$ avec $a < 0$**

Soient $X$ une v.a.r. à densité et $a, b \in R$ avec $a < 0$. $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité et pour tout $y \in \mathbb{R}$ :

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \text{ et } f_Y(y) = -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

**Remarques :**

- On peut regrouper ces deux cas dans la formule $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$.
- Le cas $a = 0$ ne donne pas une v.a.r. à densité.

**Proposition**

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Y = \lambda X$. On a : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

### 5.4 Sommes de v.a.r indépendantes

**Proposition : Somme de deux lois $\gamma$**

Soient $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$ indépendantes. Alors :

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2).$$

**Proposition : Sommes de loi exponentielles**

Soient $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ mutuellement indépendantes. Alors :

$$X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \gamma(n).$$

**Remarque :** à savoir redémontrer.