Chapitre B1 - Produits scalaires, espaces euclidiens

1 Produits scalaires

1.1 Formes bilinéaires symétriques

Définition : Forme bilinéaire

Une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $y \in E$ (fixé), l'application $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire,
- pour tout $x \in E$ (fixé), l'application $\varphi_x : y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire.

Remarques :

- Quand φ_y est linéaire, on dit que φ est linéaire par rapport à la première variable ou encore que φ est linéaire à gauche.
- Ceci ne signifie pas que φ est linéaire de l'ev $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples : produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et déterminant sur $\mathbb{R}^2$.

Définition : Forme bilinéaire symétrique

Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite symétrique si : $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

Exemples : produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Le déterminant sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas symétrique.
Remarque : Pour vérifier qu'une application φ est bilinéaire symétrique, il suffit de vérifier que'elle est linéaire à droite (ou à gauche) et symétrique.
Exemple : Produit usuel sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Proposition

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique alors :

- $\forall x \in E,\ \varphi(x, 0_E) = \varphi(0_E, x) = 0$;
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y)$.

Exemple : $V(X+Y) = ...$

1.2 Produit scalaire

Définition : Produit scalaire

Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si :

1. φ est une forme bilinéaire symétrique sur E ;
2. $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geq 0$ (on dit que φ est positive) ;
3. $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ (on dit que φ est définie).

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Remarque : Pour le caractère défini, le point important est l'implication $\Rightarrow$ l'autre étant assurée par le caractère bilinénaire.

Méthode : Vérifier que φ est un produit scalaire

En pratique, on vérifie 4 propriétés :

1. φ est linéaire par rapport à sa seconde variable ;
2. φ est symétrique ;
3. Pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) \geq 0$;
4. Si $\varphi(x,x) = 0$ alors $x = O_E$.

Remarque : Lorsqu'on a un produit scalaire, on note souvent le produit entre x et y : $\langle x|y \rangle$ ou encore $(x|y)$ (plutôt que $\varphi(x,y)$).
Exemples : Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, puis sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Théorème : Théorème de Cauchy-Schwarz

Soit φ un produit scalaire sur E. On a :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x) \times \varphi(y,y).$$

De manière équivalente, on a :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}.$$

De plus, l'inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration : à faire.
Exemples : Formes typiques avec les produits scalaires précédents puis avec la covariance (sur les variables d'espérance nulle).

1.3 Norme associée à un produit scalaire

Définition : Norme associée à un produit scalaire

Si φ est un produit scalaire sur E, on appelle norme associée à φ l'application :

$$\|\cdot\| : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R}^+, \\ x & \mapsto & \|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}. \end{array} \right.$$

En particulier, $\|x\|^2 = \varphi(x,x)$. On appelle $\|x\|$ la norme du vecteur $x \in E$.

Remarque : Cauchy-Schwarz s'écrit alors $\forall (x,y) \in E^2,\ |\varphi(x,y)| \leq \|x\| \times \|y\|$.

Proposition

Si φ est un produit scalaire sur E et si $\|\cdot\|$ est la norme associée, alors :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénité) ;
- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ (caractère défini) ;
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition : Vecteur unitaire

Un vecteur x est dit unitaire si $\|x\| = 1$.

Remarque : Si $x \neq 0_E$ alors $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

2 Orthogonalité

E est muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

2.1 Définition

Définition : Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux si $\langle x|y \rangle = 0$.

Exemples : faire quelques exemples dans $\mathbb{R}^3$.
Remarque : le seul vecteur orthogonal à tout vecteur est le vecteur nul. C'est même le seul vecteur orthogonal à lui-même.

Définition : Sous-espaces orthogonaux

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux si :

$$\forall x \in F,\ \forall y \in G,\ \langle x|y \rangle = 0.$$

De manière équivalente, ceci signifie que tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G.

Exemple : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } z = 0\}$.
Remarque : x et y sont orthogonaux ssi $\mathrm{Vect}(x)$ et $\mathrm{Vect}(y)$ sont orthogonaux.

Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux. On a $F \cap G = \{0_E\}$. En conséquence, F et G sont en somme directe.

Remarque : Attention ! Si F et G sont orthogonaux, ils sont en somme directe mais pas nécessairement supplémentaire.

Définition : Famille orthogonale et orthonormée

Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E est dite orthogonale si pour tout (i,j) avec $i \neq j$, x_i et x_j sont orthogonaux.
On dit que la famille est orthonormée si elle est orthogonale et qu'elle est formée de vecteurs unitaires. Cela est équivalent à :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle x_i | x_j \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{array} \right. .$$

Remarque : Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls, la famille $\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right)$ est orthonormée.

Proposition

Une famille orthogonale $(x_1, \ldots, x_n)$ ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Remarque : Cela traduit l'idée intuitive que deux vecteurs orthogonaux sont dans des directions différentes.

2.2 Théorème de Pythagore

Proposition

Soient x et y deux vecteurs de E. x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Remarque : L'énoncé donné contient le théorème de Pythagore et sa réciproque.

Corollaire

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

2.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (HP ?)

Proposition

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E. On définit la famille $(x_1, \dots, x_n)$ en posant :

- $x_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$;
- $\forall k \in [\![2, n]\!],\ x_k = \frac{\tilde{x_k}}{\|\tilde{x_k}\|}$ où $\tilde{x_k} = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k | x_i \rangle x_i$.

Alors :

1. la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthonormée ;
2. $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarques :

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est déjà orthonormée alors $x_i = e_i$. Plus généralement, si $(e_1, \dots, e_n)$ est orthogonale, alors $x_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$.
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E et c'est donc une base orthonormée.

Exemple : Construction d'une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit $\int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

3 Espaces euclidiens

3.1 Définition

Définition : Espace euclidien

On appelle espace euclidien tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemples : $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit $\int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

Définition

Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthornormée d'un espace euclidien si c'est une base et famille orthornormée simultanément.

Remarque : Une famille orthonormée de cardinal $\dim E$ est automatiquement une base orthonormée puisqu'elle est libre et de cardinal $\dim E$.

Proposition

Si E est un espace euclidien, alors il existe une base orthornormée de E.

3.2 Calculs dans une base orthonormée

$B = (e_1, \dots, e_n)$ dénote une base orthonormée de E.

Proposition : Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Pour tout vecteur $x \in E$, on a : $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i$.

Autrement dit, les coordonnées de x dans la base B sont $\begin{pmatrix} \langle x|e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x|e_n\rangle \end{pmatrix}$.

Exemple : avec la base canonique dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition : Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Pour tout vecteur $x \in E$, on a : $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle^2$.

Exemple : illustration sur $\mathbb{R}^2$ puis $\mathbb{R}^n$.

Proposition : Produit scalaire canonique sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

L'application $\varphi : (X,Y) \mapsto {}^tXY$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On l'appelle produit scalaire canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Proposition : Expression matricielle du produit scalaire

Soient $x, y \in E$ et X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans B. Alors : $\langle x|y\rangle = {}^tXY$ et $\|x\|^2 = {}^tXX$.

Remarque : Ainsi, dès lors que l'on travaille en base orthonormée, le produit scalaire a la même forme que le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Définition : Matrice orthogonale

Une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tMM = I_n$ c'est-à-dire si M est inversible et que son inverse est égale à sa transposée.

Exemples : Matrices scalaires, cas des matrices diagonales, $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Remarque : Si A est une matrice orthogonale alors A^{-1} est encore orthogonale.

Proposition

Soit $B' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E. B' est orthonormée ssi $P_{B,B'}$ est orthogonale.

Remarque : les matrices orthogonales représentent les isométries.
Remarque : l'inverse d'une matrice orthogonale est très facile à calculer.

4 Supplémentaire orthogonal

4.1 Définition

Définition : Orthogonal d'un sous-espace

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note : $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \langle x|y\rangle = 0\}$. Ainsi, $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :

1. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ;
2. si G est un sous-espace vectoriel de E orthogonal à F alors $G \subset F^\perp$.

Remarque : $F^\perp$ est le plus grand sous-vectoriel orthogonal à F.

4.2 Propriétés de l'orthogonal

Proposition

Soit F un sev de E et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Pour tout $x \in E$, on a :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \langle x|e_i\rangle = 0.$$

Exemple : Orthogonal de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

Lemme

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Il est possible de compléter B en une base orthonormée de E.

Proposition

Soit E un espace euclidien et F un sev de E. Alors :

1. $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$;
2. F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E. On dit que $F^\perp$ est **le** supplémentaire orthogonal de F ;
3. $(F^\perp)^\perp = F$;
4. la concaténation d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$ est une base orthonormée de E.