TD7 - Intégrales généralisées

1 Intégration sur un segment

Exercice 1 ⋆

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une primitive :

$I_1 = \int_1^2 (x-1)(x-2)\mathrm{d}x$ $\quad I_2 = \int_0^1 (5-2x)^4 \mathrm{d}x$

$I_3 = \int_0^1 3\sqrt{x} - 4x\mathrm{d}x$ $\quad I_4 = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$

$I_5 = \int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{8+t^3}}\mathrm{d}t$ $\quad I_6 = \int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$

$I_7 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ $\quad I_8 = \int_{-1}^1 e^{-2x+1}\mathrm{d}x$ $\quad I_9 = \int_0^2 \frac{x^2}{2+x^3}\mathrm{d}x$

Exercice 2 - Intégration par parties ⋆

Calculer :

$I = \int_0^1 \frac{x}{e^{2x}}\mathrm{d}x, \qquad J = \int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$

$K = \int_{-1}^0 (x^2-2x+4)e^{-x}\mathrm{d}x$

Exercice 3 - Changement de variables ⋆

Calculer grâce au changement de variable indiqué, les intégrales suivantes (proposer aussi une primitive "à vue" si vous en trouvez une) :

1. $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\mathrm{d}x$ avec $u = \sqrt{2x-1}$
2. $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ avec $u = 1+\sqrt{x}$
3. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+\ln(x)\right)}$ avec $u = 1+\ln(x)$

Exercice 4 ⋆⋆

Montrer que : $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

Exercice 5 - IPP ⋆⋆

En utilisant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x\ln(x)\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}, \quad B = \int_2^3 (3x^2-4x+1)\ln(x^5-x^4)\mathrm{d}x,$$

$$C = \int_0^1 x^\lambda \ln(x)^n \mathrm{d}x, \quad (\lambda > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}).$$

Exercice 6 - Changement de variable ⋆⋆⋆

En utilisant les changements de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x, \quad (t = \sqrt{x+1})$$

$$B = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^n+1)} \text{ où } n \in \mathbb{N}^\star, \quad (t = 1/x)$$

$$C = \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{(3+\mathrm{e}^x)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}, \quad (t = \sqrt{\mathrm{e}^x-1})$$

$$D = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\mathrm{d}x, \quad \left(t = x - \frac{1}{x}\right)$$

$$E = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\mathrm{d}x, \quad (t = 1/x)$$

$$F = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \text{ où } a > 0, \quad (t = 1/x),$$

$$G = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x, \quad (t = x^{1/6})$$

2 Intégrales impropres

Exercice 7 ⋆

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t+e^{2t}}\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\mathrm{d}t$
5. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2+1}\mathrm{d}t$

Exercice 8 ⋆⋆

Prouver la convergence, et le cas échéant calculer la valeur de chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x+3)^2}\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}\mathrm{d}x$
5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ (utiliser une IPP)
6. $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x$ (utiliser une IPP)

Exercice 9 ⋆

Prouver la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur :

$$A = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}\mathrm{d}t, \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x,$$

$$C = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}.$$

Exercice 10 ⋆⋆

Déterminer la nature et le cas échéant la valeur des intégrales suivantes :

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\mathrm{d}t, \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 11 ⋆⋆

1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} P(t)^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
est convergente. Montrer alors qu'elle est positive.
2. À quelle condition sur P a-t-on :
$$\int_0^{+\infty} P(t)^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 0 \ ?$$

Exercice 12 ⋆⋆

1. Montrer que $\forall t \geq 1$, $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$
2. En déduire $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$

Exercice 13 ⋆⋆

Soit α un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence et calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 14 ⋆⋆

On désigne par n un entier naturel.

1. (a) Justifier que l'on a $\dfrac{(\ln t)^n}{t^3} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
   (b) En déduire la convergence de $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^3}\mathrm{d}t$
2. (a) Calculer I_0.
   (b) Grâce à une IPP, donner une relation entre I_{n+1} et I_n.
   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$

Exercice 15 ⋆⋆

On note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence de l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n+1} = \frac{1}{4n}I_n$.
4. En déduire une expression de I_n en fonction de n et I_1.

3 Changements de variables

Exercice 16 ⋆⋆

Soit α un réel positif.

1. Déterminer deux constantes λ et μ telles que pour tout $t > 0$:
$$\frac{1}{t(t+a)} = \frac{\lambda}{t} + \frac{\mu}{t+a}.$$
2. À l'aide du changement de variable $x = \mathrm{e}^t$, prouver la convergence de :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + a}$$
et calculer sa valeur.

Exercice 17 ⋆⋆

À l'aide du changement de variable indiqué, étudier la convergence de l'intégrale et, le cas échéant, en calculer la valeur :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t \quad (u = \sqrt{t}).$$

4 Exercices de concours

Exercice 18 - Ecricome 1993 ⋆⋆

Justifier l'existence et calculer la valeur de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}}\mathrm{d}t.$$

Exercice 19 - QSP ESCP 2016 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Montrer que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

converge également.

Exercice 20 - Oral ESCP 2013 ⋆⋆⋆⋆⋆

1. Montrer que pour tout $x>0$, l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$
converge. On note alors f l'application définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x)=\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
3. (a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   (b) Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$.
4. (a) En utilisant le changement de variable $u=x\mathrm{e}^t$ que l'on justifiera, montrer que :
$$f(x)=\ln(x)(\ln(x)-\ln(1+x))+\int_x^{+\infty} \frac{\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u.$$
   (b) En déduire que f est dériable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer $f'(x)$. Retrouver ainsi le sens de variation de f.

Exercice 21 - Oral ESCP 2018 ⋆⋆⋆⋆⋆

Pour tout entier $p\geq 1$, on définit la fonction $f_p : [1,+\infty[$ par :
$$f_p(t)=\frac{1}{t(t+1)(t+2)\cdots(t+p)}.$$

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_p(t)\mathrm{d}t$. converge.

Pour tout $p\in\mathbb{N}^\star$, on pose alors :
$$I_p=\int_1^{+\infty} f_p(t)\mathrm{d}t.$$

2. Pour tout $t\in[1,+\infty[$, étudier la convergence de la suite $(f_p(t))_{p\geq 1}$.
3. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(I_p)_{p\geq 1}$.
4. Pour p fixé, on *admet* l'existence de nombres réels $\alpha_0,\dots,\alpha_p$ tels que :
$$\forall t\in\mathbb{R}\setminus[\![-p,0]\!],\ f_p(t)=\sum_{k=0}^p \frac{\alpha_k}{t+k}.$$
Montrer que pour tout $j\in[\![0,p]\!]$, on a :
$$\alpha_j=\frac{(-1)^j}{j!(p-j)!}.$$
Indice : Pour tout $j\in[\![0,p]\!]$, on pourra multiplier la relation admise par $(t+j)$ et choisir une valeur particulière de t.
5. Calculer $\sum_{k=0}^p \alpha_k$ et en déduire une expression de I_p sans intégrale sous forme d'une somme.

5 Maths approfondies

5.1 Sur un segment

Exercice 22 - Un changement classique ⋆

1. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, on a :
$$\sin(t)=\frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}\quad\text{et}\quad\cos(t)=\frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}.$$
2. Soit $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$. En posant le changement de variable $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ déterminer :
$$A=\int_0^x \frac{1}{\cos(t)}\mathrm{d}t$$
et :
$$B=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos(\theta)\cos(t)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 23 - IPP ⋆⋆

En utilisant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_0^1 x^2\arctan(x)\mathrm{d}x,\quad B=\int_1^{\mathrm{e}^\pi}\cos(\ln(x))\mathrm{d}x,$$

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4(x)}$$

$$F=\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\mathrm{d}t,\quad G=\int_0^\pi (x^2+2x+2)\cos(2x)\mathrm{d}x,$$

$$I=\int_0^x \arctan(t)\mathrm{d}t, J=\int_0^1 (x+1)\arctan(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 24 - Sommes de Riemann ⋆⋆

Déterminer les limites suivantes :

$$A=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}},\quad B=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$C=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}.$$

Exercice 25 - Changement de variable ⋆⋆⋆

En utilisant les changements de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x+\sin(x)}\mathrm{d}x, \quad (t = x+\sin(x)) \\ B &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2-\sin(2x)}\mathrm{d}x, \quad (t=\sin(x)-\cos(x)) \\ C &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)\mathrm{d}x, \quad (t=\sin(x)) \\ D &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\mathrm{d}x. \quad (t=\tan(x)) \end{aligned}$$

5.2 Intégrales généralisées

Exercice 26 ⋆

Prouver la convergence des intégrales suivantes et calculer leurs valeurs :

$$A = \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t, \quad B = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\cos t\mathrm{d}t,$$

Exercice 27 ⋆⋆

Justifier l'existence de :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$$

et calculer sa valeur par une intégration par partie.

Exercice 28 ⋆⋆⋆

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{1-x}{\ln x}\mathrm{d}x, \quad B = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}},$$

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u, \quad D = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}}.$$

Exercice 29 ⋆⋆⋆

Montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et est négative.

Exercice 30 ⋆⋆

Déterminer la nature et le cas échéant la valeur des intégrales suivantes grâce au changement de variable indiqué.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\mathrm{d}t, \quad (u=1/t) \\ B &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t, \quad (x=1/t) \\ C &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}. \quad (t=\mathrm{e}^x) \end{aligned}$$

Exercice 31 - Intégrale de Fesnel ⋆⋆⋆

À l'aide du changement de variable $u=t^2$, puis d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\mathrm{d}t$ converge.

5.3 Fonction Γ et intégrales à paramètre

Exercice 32 ⋆⋆

On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \end{array} \right. .$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et déterminer f'. En déduire les variations de f.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$, calculer $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$. En déduire que $f(x)$ est compris entre $x\ln(2)$ et $x^2\ln(2)$. En déduire les limites de f en 0, en 1 et en $+\infty$.

Exercice 33 - Γ aux demi-entiers ⋆⋆⋆

On rappelle que l'intégrale de Gauss vaut :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

1. En réalisant le changement de variable $u=\frac{t^2}{2}$ dans l'intégrale de Gauss, déterminer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

Exercice 34 ⋆⋆⋆

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+t^3}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $F(x)$ converge. Ainsi F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa limite en $+\infty$. En déduire le tableau de variations de F (on ne demande pas la valeur de $F(0)$).
4. (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a :
$$|\mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-b}| \leq |a - b|.$$
   (b) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$|F(x) - F(y)| \leq |x^2 - y^2|.$$
   (c) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 35 ⋆⋆⋆⋆

Soit $\alpha > 0$. On pose, sous réserve de convergence :
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(\alpha t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les intégrales I et J convergent.
2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on a :
$$\int_\epsilon^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(\alpha t)}{t}\mathrm{d}t = \int_\epsilon^{\alpha\epsilon} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t.$$
3. En déduire que $J = \ln(\alpha)$.

Exercice 36 - $\zeta(2)$ ⋆⋆⋆⋆

On admet dans cet exercice que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose sous réserve de convergence :
$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, I_n est convergente et que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $f(x) = f(x)\mathrm{e}^{-nx} + \sum_{k=1}^{n} x\mathrm{e}^{-kx}$.
3. En déduire que :
$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}.$$
4. À l'aide du changement de variable $x = -\ln(t)$, prouver la convergence de :
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1 - t}\mathrm{d}t$$
et calculer sa valeur.

5.4 Exercices de concours

Exercice 37 - Ecricome 1994 ⋆⋆

Pour $k \in \mathbb{N}$, à l'aide du changement de variable $x = -(k+1)\ln t$, montrer que :
$$\int_0^1 t^k (\ln t)^k \mathrm{d}t$$
converge et donner sa valeur.

Exercice 38 - Oral ESCP 2018 ⋆⋆⋆⋆⋆

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales :
$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
convergent.

On pose alors pour tout x réel :
$$C(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
et :
$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

2. (a) Montrer que les deux fonctions C et S sont continues sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tous réels u et h on a :
$$|\sin(u+h) - \sin(u) - h\cos(u)| \leq \frac{h^2}{2}.$$
   (c) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout réel x, $S'(x)$.
3. Déterminer pour tout réel x, une relation entre $S'(x)$ et $S(x)$.
4. (a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de :
$$g : \begin{cases} D_g & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}} f(x) \end{cases}.$$
   En déduire les solutions de l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$.
   (b) On suppose qu'on peut écrire pour tout x réel $S(x) = A(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$ avec A de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Établir la relation :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}}{2} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t.$$
5. Déterminer un équivalent de $S(x)$ au voisinage de $\pm\infty$.