TD8 - Suites de variables aléatoires

Exercice 1 - Loi du min, loi du max ⋆⋆

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère n variables aléatoires X_1, X_2, ... ,X_n, indépendantes, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
On pose :
$I_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $S_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

1. Montrer que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, et pour tout k de $\mathbb{N}^\star$, on a $P(X_i > k) = (1-p)^k$.
2. (a) Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la probabilité $P(I_n > k)$.
   (b) En déduire la loi de I_n.
   (c) En déduire l'espérance de I_n.
3. (a) Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la probabilité $P(S_n \leq k)$, puis en déduire la loi de S_n.
   (b) **Très calculatoire :** En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton, que $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{(-1)^{i-1}}{1-q^i}$

Exercice 2 - Nombre d'échecs ⋆⋆

On désigne par p un réel de $]0;1[$. On considère une suite infinie d'épreuves indépendantes donnant un succès avec la probabilité p et un échec avec la probabilité $1-p$. On note Y_1 le nombre d'échecs obtenus avant le premier succès et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on note Y_k le nombre d'échecs obtenus entre le $(k-1)^e$ et le k^e succès.
Pour tout n, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Donner la loi de Y_1 et vérifier que les variables Y_k suivent toutes la même loi.
2. (a) Pour tout entier naturel k non nul, on pose $Z_k = Y_k + 1$. Reconnaître la loi de Z_k.
   (b) Montrer pour $m_1 \leqslant m_2$ que :
   $$\sum_{k=m_1}^{m_2} \binom{k}{m_1} = \binom{m_1}{m_2}.$$
   (c) En déduire la loi de T_n.

Exercice 3 ⋆⋆

Soient X, Y et $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ indépendantes. Montrer que $\frac{X+Y}{1+Z}$ admet une espérance et la déterminer.

Exercice 4 - Lemme des coalitions ⋆⋆

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$ et indépendantes.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$: $Y_n = X_n X_{n+1} X_{n+2}$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. En choisissant i et j dans $\left(\mathbb{N}^\star\right)^2$, tels que $|i-j| > 2$, calculer $E(Y_i Y_j)$.

Exercice 5 ⋆⋆⋆

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 3$. On tire simultanément 3 boules de l'urne et note X_1 le plus petit numéro, X_3 le plus grand et X_2 le dernier.

1. Déterminer la loi de (X_1, X_2, X_3).
2. En déduire la loi de X_2 puis son espérance.

Exercice 6 ⋆⋆⋆

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. On pose pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $Y_i = X_i X_{i+1}$. Montrer que Y_i et Y_j sont indépendantes si et seulement si $|i-j| > 1$.

Exercice 7 - QSP ESCP 2014 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que la variable aléatoire $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance, que l'on notera par la suite m_n.
2. Soient $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$. Exprimer l'espérance de $\frac{S_k}{S_n}$ en fonction de m_n.