CORRECTION DM2 - SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 1 - ECRICOME ECE 2021 (Exercice 3)

Partie I

1. Avec les notations de l'énoncé, on a :

$$\boxed{[X=2]=P_1\cap P_2}$$

puisque $X=2$ signifie que les deux derniers lancers (numéro 1 et 2) ont donné pile.
De même, on a :

$$\boxed{[X=3]=F_1\cap P_2\cap P_3} \quad \text{et} \quad \boxed{[X=4]=(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)\cup(P_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4).}$$

Pour $X=3$, on ne peut avoir pile au premier lancer, puisque comme on a P_2, ça donnerait $X=2$.
Pour $X=4$, le lancer 2 ne peut pas être pile pour la même raison.
On a ainsi par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} a_2 &= P(X=2)=P(P_1)P(P_2)=\boxed{\frac{1}{4}}, \\ a_3 &= P(X=3)=P(F_1)P(P_2)P(P_3)=\boxed{\frac{1}{8}}, \\ a_4 &= P(X=4)=P(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)+P(P_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\boxed{\frac{1}{8}}. \end{aligned}$$

2. $([X=-1])\cup([X=k])_{k\geqslant 2}$ est un système complet d'événements. Donc $\Omega=[X=-1]\cup\bigcup_{k=2}^{+\infty}[X=k]$ puis :

$$U_n=U_n\cap\Omega=U_n\cap\left([X=-1]\cup\bigcup_{k=2}^{+\infty}[X=k]\right)=(U_n\cap[X=-1])\cup\bigcup_{k=2}^{+\infty}(U_n\cap[X=k]).$$

Pour $k=-1$, les événements U_n (obtenir 2 piles consécutifs dans les n premiers lancers) et $[X=-1]$ (ne jamais obtenir 2 piles conséuctifs) sont incompatibles. Pour $k>n$, les événements U_n (obtenir 2 piles consécutifs dans les n premiers lancers) et $[X=k]$ (obtenir 2 piles consécutifs pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ lancer) sont incompatibles. Donc $U_n=\bigcup_{k=2}^{n}(U_n\cap[X=k])$. Puis pour $2\leqslant k\geqslant n$, on a $[X=k]\subset U_n$. D'où :

$$U_n=\bigcup_{k=2}^{n}[X=k].$$

Comme $([X=-1])\cup([X=k])_{k\geqslant 2}$ est un système complet d'événements, les événements sont incompatibles deux à deux et donc en passant aux probabilités, on obtient :

$$\boxed{\underbrace{P(U_n)}_{=u_n}=\sum_{k=2}^{+\infty}\underbrace{P(X=k)}_{=a_k}.}$$

3. (a)

```
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile < 2 :
        if rd.random() < 1/2:
```

```
            pile = pile + 1
        else:
            pile = 0
        tirs = tirs + 1
    return tirs
```

(b)

```
def moyenne(n):
    tot = 0
    for i in range(n):
        tot = tot + simulX()
    return tot/n
```

(c) La moyenne, pour des grands n, semble converger vers une valeur qui semble être 6. Cela suggère que l'espérance de X existe et vaut 6.

On verra dans un chapitre ultérieur comment justifier plus précisément cette observation dans le chapitre estimation.

Partie II

4. (a) B_n est obtenir deux piles consécutifs le $n^{\text{ème}}$ lancer. Donc $U_n = \bigcup_{k=2}^{n} B_k$. C'est une traduction directe de « obtenir deux piles consécutifs sur l'un des n premiers lancers ».

Donc :

$$U_{n+1} = \bigcup_{k=2}^{n+1} B_k = \left(\bigcup_{k=2}^{n} B_k \right) \cup B_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}.$$

Puis par la formule du crible :

$$\boxed{P(U_{n+1}) = P(U_n \cup B_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).}$$

(b) Procédons par double inclusion.

- <u>Sens $U_n \cap B_{n+1} \supset (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$.</u>
  On a $U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} \subset U_{n-2} \subset U_n \subset U_n \cap B_{n+1}$.
  Et on a $P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} = P_{n-1} \cap B_{n+1} \subset B_{n+1} \subset U_n \cap B_{n+1}$.
  Donc la première inclusion est vérifiée.
- <u>Sens $U_n \cap B_{n+1} \subset (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$.</u>
  Comme (F_{n-1}, P_{n-1}) est un système complet d'événements, on a :

  $$U_n = U_n \cap (F_{n-1} \cup P_{n-1}) = (U_n \cap F_{n-1}) \cup (U_n \cap P_{n-1}).$$

  Ainsi :

  $$U_n \cap B_{n+1} = (U_n \cap F_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (U_n \cap P_{n-1} \cap B_{n+1}).$$

  On a $U_n \cap P_{n-1} \cap B_{n+1} \subset P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$. Donc le deuxième membre est bien inclus.
  Pour le premier membre, on a :

  $$U_n = \bigcup_{k=2}^{n} B_k = U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n.$$

  Donc :

  $$U_n \cap F_{n-1} \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n) \cap F_{n-1} \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup ((B_{n-1} \cup B_n) \cap F_{n-1} \cap B_{n+1}).$$

  Comme $B_{n-1} \cup B_n$ et F_{n-1} sont incompatibles, cela se simplifie en :

  $$U_n \cap F_{n-1} \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap B_{n+1}.$$

  On obtient donc le premier membre recherché et donc l'inclusion est à nouveau vérifiée.

Remarque : je pense qu'une justification « avec une phrase » pourrait fonctionner pour peu qu'elle soit précise. Mais comme j'avais déjà entièrement défini U_n à la question précédente, je vous propose quelque chose de plus rigoureux.

(c) Ainsi, on a pour tout $n \geqslant 4$:

$$u_{n+1} = P(U_{n+1}) = P(U_n \cup B_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

On a $P(B_{n+1}) = P(P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ par indépendance.
On a également :

$$P(U_n \cap B_{n+1}) = P((U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})) = P(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + P((P_{n-1} \cap P_n \cap P$$

par incompatibilité des événements (car F_{n-1} et P_{n-1} sont incompatibles). Puis par indépendance :

$$P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2}) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(u_{n-2} + 1).$$

Effectivement, $U_{n-2} = \bigcup_{k=2}^{n-2} B_k$ ne dépend que de P_k pour $k \leqslant n-2$ et donc est indépendant de $F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$.
Donc :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(u_{n-2} + 1) = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).}$$

5. On a $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ avec $\frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \geqslant 0$ puisuqe u_{n-2} est une probabilité. $\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ est croissante.}}$
En tant que probabilité, (u_n) est majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Par passage à la limite dans $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$, on obtient $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$ et donc $\ell = 1$.
Donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.}$

6. La suite (U_n) est une suite d'événements croissants. D'après le théorème de la limite monotone (en probabilités), on a :

$$P(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n) = \lim_{n \to +\infty} P(U_n) = 1.$$

Puis $[X = -1] = \overline{\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n}$ donc : $\boxed{P(X = -1) = 1 - P(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n) = 0.}$

Partie III - Étude de l'espérance de X

7. Soit $n \geqslant 4$. On a :

$$\boxed{v_n - v_{n+1} = (1 - u_n) - (1 - u_{n+1}) = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = \frac{1}{8} v_{n-2}.}$$

8. On a vu en question 2 que :

$$u_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} a_k = \sum_{k=2}^{n} a_k + a_{n+1} = u_n + P(X = n+1).$$

Donc :

$$\boxed{P(X = n+1) = u_{n+1} - u_n = (1 - v_{n+1}) - (1 - v_n) = v_n - v_{n+1}.}$$

9. Procédons par récurrence.
   - **Initialisation :** Pour $n = 2$, on a :

$$S_2 = \sum_{k=2}^{2} kP(X = k) = 2P(X = 2) = 2a_2 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

et :

$$\begin{aligned}
6-8v_{2+2}-2v_2 &= 6-8v_4-2v_2 = 6-8(1-u_4)-2(1-u_2)\\
&= 6-8(1-a_2-a_3-a_4)-2(1-a_2) = 6-8\times\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)-2\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\\
&= 6-4-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{S_2 = 6-8v_{2+2}-2v_2.}$

- **Hérédité :** Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $S_n = 6-8v_{n+2}-nv_n$.
  On a alors :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} kP(X=k) = \sum_{k=2}^{n} kP(X=k)+(n+1)P(X=n+1)\\
&= S_n+(n+1)P(X=n+1) = (6-8v_{n+2}-nv_n)+(n+1)(v_n-v_{n+1})\\
&= 6-8v_{n+2}+v_n-(n+1)v_{n+1}.
\end{aligned}$$

On utilise alors :

$$v_{n+2}-v_{n+3}=\frac{1}{8}v_n.$$

Ainsi :

$$\boxed{S_{n+1} = 6-8v_{n+2}+8(v_{n+2}-v_{n+3})-(n+1)v_{n+1} = 6-8v_{n+3}-(n+1)v_{n+1}.}$$

Donc, par principe de récurrence, on a bien pour tout $n \geqslant 2$: $\boxed{S_n = 6-8v_{n+2}-nv_n.}$

10. Comme $v_n \geqslant 0$, on déduit de la relation précédente que $\boxed{S_n \leqslant 6.}$ Donc (S_n) est majorée.

    De plus $\boxed{(S_n) \text{ est croissante}}$ puisque pour tout $n \geqslant 2$:

$$S_{n+1}-S_n = (n+1)P(X=n+1) \geqslant 0.$$

11. Comme (S_n) est croissante et majorée, $\boxed{(S_n) \text{ converge}}$ (théorème de la convergence monotone).

    Donc la série $\sum_{k=2}^{+\infty} kP(X=k)$ converge. Si on ajoute le terme $-1\times P(X=-1) = -1\times 0 = 0$, on en déduit que $\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$

12. (a) On a pour tout $n \geqslant 2$:

$$nv_n = 6-8v_{n+2}-S_n.$$

    On a $v_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et (S_n) converge.

    Donc $\boxed{(nv_n) \text{ converge.}}$

    (b) Si $nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \neq 0$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$.

    La série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda}{n}$ diverge comme multiple de la série harmonique.

    Pour n suffisamment grand, (v_n) est du signe de λ et donc de signe constant. Donc par critère d'équivalence, $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} v_n \text{ diverge.}}$

    Cependant, d'après la question 7, on a pour $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=4}^{n+2} v_{k-2} = 8\sum_{k=4}^{n+2}(v_k-v_{k+1}) = 8\left(v_4-v_{n+3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 8v_4.$$

    Donc $\boxed{\text{la série converge.}}$ C'est donc contradictoire et ainsi nécessairement, on a $\lambda = 0$.

    Et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} nv_n = 0.}$

    (c) Ainsi, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 6-8v_{n+2}-nv_n = 6.}$$

    Et donc $\boxed{E(X) = 6.}$