DM3 - Variables à densité

À rendre le mardi 12/11/2024

Exercice 1 - ECRICOME ECE 2019 (Exercice 3)

On suppose que toutes les variables présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1, \\ \frac{-1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
3. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a : $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^A f(u)\mathrm{d}u$.
   En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.
   (b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, on a :
   $$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$
   (b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.
   (c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.
   (a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.
   (b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :
   $$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (c) Montrer que Y admet une espérance, et la calculer.

Partie II

6. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.
   Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.
   (a) Déterminer la loi de la variable $Z = \frac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.
   (b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.
   (c) Montrer que pour tout réel x, on a :
   $$P(T \leqslant x) = \frac{1}{2}P(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}P(Y \geqslant -x).$$

(d) En déduire la fonction de répartition de T.

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et soit V la variable aléatoire définie par : $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$.

   (a) Rappeler la fonction de répartition de U.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables aléatoires V et Y suivent la même loi.

8. (a) Écrire une fonction en langage `Python`, d'en-tête **`def`** `D(n):` qui prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée et renvoie un tableau `numpy` contenant n rélaslisations de la variable D.

   (b) On considère le script suivant :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

n = input("Entrer n")
a = D(n)
b = rd.random(n)
c = a/np.sqrt(1-b)

print(np.sum(c)/n)
```

   De quelle variable aléatoire les coefficients du tableau `c` sont-ils une simulation ? Pour n assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.