CONCOURS BLANC 1 - MATHS APPLIQUÉES

Lundi 04/11/2024 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Changez de copie** à chaque nouvel exercice.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques `Python` *sont importées comme suit :*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - EDHEC ECE 2020 (Exercice 3)

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $[X=k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $P_{[X=k]}(Y=i)$.
4. On rappelle les commandes `Python` suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :
   - `rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$;
   - `rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p ;
   - `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p ;
   - `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

   Compléter le script `Python` suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = int(input("Entrez la valeur de n :"))
p = int(input("Entrez la valeur de p :"))
X = ...
Y = ...
```

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0,n]\!]$, puis montrer que :

$$P(Y=0) = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}.$$

   (b) Écrire, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la probabilité $P(Y=i)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Montrer l'égalité : $i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$.
   (b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :
   $$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right).$$
   (c) En déduire que $E(Y) = \dfrac{(n+1)p}{2}$.
7. (a) Établir que :
   $$\forall n \geqslant 2,\ E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}\right).$$
   (b) Montrer que l'on a :
   $$\forall n \geqslant 2,\ E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}.$$
   (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.
   (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Exercice 2 - EDHEC ECE 2004 (Exercice 1)

Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$ et on a, en particulier, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}\mathrm{d}t$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ln(2)$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Donner la limite de la suite (u_n).
5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

Exercice 3 - ECRICOME ECE 2020 (Exercice 1 - adapté)

Dans cet exercice, on désigne par $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3 et on note I_3 la matrice identité de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie I - Étude du cas où $a = 1$.
Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.
2. En déduire un polynôme annulateur de M.
3. M est-elle inversible ? Exprimer son inverse en fonction de M et I_3.

Partie II - Étude du cas où $a = 0$.
Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Montrer que $E_1(M) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ MX = X\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déterminer une base et la dimension.
5. Démontrer que M n'est pas inversible.
6. Déterminer une base et la dimension de $E_0(M) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
7. La concaténation des bases de $E_1(M)$ et de $E_0(M)$ est-elle une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Partie III - Étude du cas où a est différent de 0 et de 1.
Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

8. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.
9. Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
10. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.
11. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
12. Calculer $P^{-1}MP$. Que constate-ton ?

Problème 4 - EDHEC ECE 2021 (Problème)

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0, 1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie I - Un jeu naïf.
Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants.
Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.
Pour tout k de $\mathbb{N}^\star$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1$^{\text{er}}$ pile par A (resp. par B) lors de la $k^{\text{ème}}$ manche.
On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^\star$, E_k l'événement : « Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ème}}$ manche ».
On note E l'événement : « Il y a perpétuellement égalité » .
On note G (resp. H) l'événement : « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement : « A (resp. B) gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche ».

1. **Étude de la première manche.**
   (a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.
   (b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.
   (c) Montrer que $P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i)$ et en déduire l'expression explicite de $P(E_1)$ en fonction de p et q.
   (d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.
2. **Calcul de la probabilité de l'événement G.**
   (a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $[X_n < Y_n]$.

(b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $P_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geqslant 2,\ P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\frac{q}{1+q}.$$

(c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

(d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul, que : $P(G) = \frac{1}{2}$.

(e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est-à-dire que $P(E) = 0$.

Partie II - Un autre jeu.

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. (a) À l'aide du système complet d'événements $([X_1 = i])_{i\in\mathbb{N}^\star}$, montrer que $P(Y_1 = X_1 + 1) = \frac{pq}{1+q}$.

   (b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

4. (a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^\star$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $P(K_n)$.

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Partie III - Informatique.

On rappelle que la commande `rd.geometric(p)` permet en `Python` de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Compléter le script `Python` suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie I et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```python
p = int(input("Entrez une valeur pour p"))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y:
    X = ...
    Y = ...
    c = ...
if X < Y:
    ...
else:
    ...
print(c)
```

7. Compléter les commandes suivantes afin qu'une fois ajoutées au script précédent, elles permettent de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```python
if ...:
    print("A gagne le deuxième jeu")
else:
    ...
```