CONCOURS BLANC 1 - MATHS APPROFONDIES

Lundi 04/11/2024 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Changez de copie** à chaque nouvel exercice.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques `Python` *sont importées comme suit :*

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - Ecricome ECS 2012 (Exercice 1)

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x + \mathrm{e}^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x + \mathrm{e}^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.

2. Établir que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ 2\sqrt{x\mathrm{e}^t} \leq x + \mathrm{e}^t$ puis que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Établir que : $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}$.
4. Montrer que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0, 1]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.
   (b) On suppose qu'une fonction d'en-tête `def ecricome(x):` est déjà écrite et qu'elle renvoie $f(x)$. À l'aide de la fonction `ecricome`, écrire une fonction d'en-tête `def suite(eps):` qui pour tout réel $\epsilon > 0$ calcule le premier entier N tel que $\frac{1}{2^N} \leq \epsilon$ et renvoie la valeur u_N correspondante.
7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^\star$. Démontrer que :
$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.$$
   Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f'(x) = -g(x)$.
8. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ T(x) = xf(x)$.
   Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ T'(x) = \frac{1}{1+x}$ puis que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ T(x) = \ln(1+x)$.

Exercice 2 - EDHEC ECS 2015 (Exercice 1)

Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0, on ait : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$.
   (b) En déduire la valeur de I_1.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.
   (c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)^2}$.
   (a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.
   (b) Calculer J_0.
6. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^\star$, calculer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.
   (b) Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$ en fonction de J_n.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} J_n$.
   (d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1}I_n$ est convergente et donner sa somme.
7. À l'aide des questions 4a et 6a, compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle permette le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n supérieure ou égale à 2 passée en paramètre.

```python
def suites(n):
    I = np.log(2)
    J = 1/2
    J = ...
    for k in range(2,n+1):
        I = ...
        J = ...
    return I, J
```

Exercice 3 - EDHEC ECS 2018 (Sujet 1 - Exercice 2)

Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on note $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ termes}}$ et on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$, où Id_E est l'endormorphisme identité de E.

On dit que l'endormorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^\star$) si l'on a :

$$f^k = 0 \text{ et } f^{k-1} \neq 0.$$

On note I_2 la matrice identité de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^\star$) si l'on a $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie I

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2.
2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.

(a) Établir l'égalité $ad - bc = 0$.
(b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.
(c) En déduire alors que $a + d = 0$.

3. Conclure que : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0$.

Partie II
On considère dans cette partie un endormorphisme f non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de E de dimension 2.

4. (a) Montrer que, si $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.
   (b) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. Établir alors que $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis conclure que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.
   (c) En déduire, à l'aide de la partie I, l'équivalence : f nilpotente $\Leftrightarrow \ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

On suppose dans toute la suite que f est nilpotente et on en étudie quelques propriétés.

5. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
6. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.
   (a) Montrer les inclusions : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\ker(v) \subset \ker(f)$.
   (b) En déduire les égalités : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ et $\ker(v) = \ker(f)$.
   (c) En déduire l'égalité $\ker(u) = \mathrm{Im}(v)$.
   (d) Conclure.

Problème 4 - Ecricome ECS 2018 (Problème)

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie I - Variables vérifiant une relation de Panjer
On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une **relation de Panjer** s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\boxed{P(N=0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^\star,\ P(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(N = k-1).}$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$ et que b est un réel strictement positif.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(N=k) = \frac{b^k}{k!} P(N=0).$$
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b. Préciser son espérance et sa variance.
2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \geq 2,\ P(N=k) = 0.$$
   (b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.
3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times P(Z = k-1).$$
   (b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes en fonction de n et p.

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.
   (a) Calculer $P(N = 1)$. En déduire que $a + b \geq 0$.
   (b) Montrer que pour tout entier $m \geq 1$:
$$\sum_{k=1}^{m} kP(N = k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k + 1)P(N = k) + b\sum_{k=0}^{m-1} P(N = k).$$
   (c) En déduire que $\left((1 - a)\sum_{k=1}^{m} kP(N = k)\right)_{m\geq 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance. Préciser alors la valeur de $E(N)$ en fonction de a et b.
   (d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que :
$$E(N^2) = \frac{(a + b)(a + b + 1)}{(1 - a)^2}.$$
   (e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur $V(N)$ en fonction de a et b.
   (f) Montrer que $E(N) = V(N)$ si et seulement si N suit une loi de Poisson.

Partie II - Fonction génératrice

On notera dans la suite :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = P(N = k),$$
où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la série $\sum_{k\geq 0} p_k x^k$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0, 1]$ par :
$$\forall x \in [0, 1],\ G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)x^k$$
et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\frac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \frac{-(a+b)}{a}$.
On note enfin f la fonction définie par : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = p_0(1 - ax)^{\alpha}$.

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in [0, 1],\ f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1 - ax)^{\alpha-k}.$$

7. Soit $x \in [0, 1]$.
   (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n + 1)p_{n+1}\int_0^x (1 - at)^{\alpha-n-1}(x - t)^n \mathrm{d}t.$$
   (b) Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{x-t}{1-at} \leq 1$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leq \int_0^x (1 - at)^{\alpha-n-1}(x - t)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^x (1 - at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$
   (c) En déduire que :
$$G(x) = p_0(1 - ax)^{\alpha}.$$
   En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier que $G'(1) = E(N)$.

Partie III - Formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question 4 de la partie I.

On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geq 1 \end{cases}$$

autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = 0 \text{ si } N(\omega) = 0 \text{ et } S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \text{ sinon.}$$

8. Calculer $P(S = 0)$ lorsque $a \in]0,1[$ à l'aide de la partie II.
9. (a) Calculer $P(S = 0)$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

   (b) On considère le fonction `Python` suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```python
def simulX(n):
    y = 0
    for i in range(1,n+1):
        if rd.random() < 1/2:
            y = y+1
    return  y
```

   Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

   (c) On rappelle qu'avec `Numpy` en `Python`, la fonction `rd.poisson(mu)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `mu`, le module `numpy.random` étant importé sous l'identifiant `rd`.

   On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre μ et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.

   Recopier et compléter la fonction `Python` suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```python
def simulS(mu,n):
    N = rd.poisson(mu)
    ......................
    ......................
    ......................
    ......................
```

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \geq 0,\ p_k = P(N = k)$$

   et on notera également :

$$\forall k \geq 0,\ q_k = P(X_1 = k).$$

   Enfin, on considère pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que : $\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ E(X_i|S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}$.

   Indication : on pourra considérer la somme $\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i|S_{n+1} = k)$.

   (b) Justifier que :$\forall j \in [\![0, k]\!],\ P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j)P(S_{n+1} = k) = q_j P(S_n = k - j)$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S_n = k - j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k).$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.

(a) Montrer que :

$$\forall j \in [\![0, k]\!],\ P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k - j).$$

(b) Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

(c) Justifier que :

$$P(S = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

(d) En déduire finalement que :

$$P(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j).$$