CONCOURS BLANC 1 - MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1 - EDHEC ECE 2020 (Exercice 3)

1. Si $n=1$, alors X est la variable certaine égale à 1. Dans ce cas, Y prend les valeurs 0 ou 1. $Y=0$ si l'unique boule tirée n'est pas blanche et $Y=1$ si la boule est blanche. Ainsi Y suit une loi de Bernoulli dont le succès est « on tire une boule blanche ».
   Donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)}$ puisque la probabilité de tirer une boule blanche est p.
2. $\boxed{X \text{ suit une loi uniforme } \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket).}$
   On a :
   $$\boxed{E(X)=\frac{n+1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X)=\frac{n^2-1}{12}.}$$
3. Si $X=k$, alors on tire k avec remises et on compte le nombre de boules blanches tirées. Puisqu'il y a remise, les tirages sont indépendants.
   Ainsi, Y compte le nombre de succès « on tire une boule blanche » dans les k répétitions d'épreuves de Bernoulli indépendantes. Dit autrement, conditionnellement à $[X=k]$, $\boxed{Y \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}(k,p).}$
   Ainsi pour $i \in \llbracket 0,k \rrbracket$, on a :
   $$\boxed{P_{[X=k]}(Y=i)=\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}.}$$
   Et pour $i>k$, on a :
   $$\boxed{P_{[X=k]}(Y=i)=0}$$
   puisque $Y(\omega)\leqslant k$ si $X(\omega)=k$.
   Remarque : l'expression $P_{[X=k]}(Y=i)=\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}$ est en fait valide même pour $i>k$, puisque dans ce cas $\binom{k}{i}=0$.
4.

```python
n = int(input("Entrez la valeur de n :"))
p = int(input("Entrez la valeur de p :"))
X = rd.randint(1,n+1)
Y = rd.binomial(X,p)
```

5. (a) Si on pioche la boule n dans la première urne, puis que l'on pioche $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$ fois une boule blanche et $n-k$ fois une boule non-blanche, alors $Y(\omega)=k$. Donc on a bien $\boxed{\llbracket 0,n \rrbracket \subset Y(\Omega).}$
   Réciproquement, Y est un nombre de boules, donc un entier positif (ou nul). Et comme on a $Y \leqslant X$ et comme $X(\Omega)=\llbracket 1,n \rrbracket$, on a nécessairement $Y \leqslant n$. Donc $\boxed{Y(\Omega) \subset \llbracket 0,n \rrbracket.}$
   Ainsi on a bien $\boxed{Y(\omega)=\llbracket 0,n \rrbracket.}$
   De plus, en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements ($[X=$

$k])_{k\in[\![1,n]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P_{[X=k]}(Y=0)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\times\binom{k}{0}p^0(1-p)^{k-0}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-p)^k\\
&= \frac{1}{n}(1-p)\times\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \text{ (somme des termes d'une suite géométrique)}\\
&= \boxed{\frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}.}
\end{aligned}$$

(b) Pour $i\in[\![1,n]\!]$, on procède de manière similaire en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X=k])_{k\in[\![1,n]\!]}$. On a :

$$\begin{aligned}
P(Y=i) &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)\underbrace{P_{[X=k]}(Y=i)}_{=0 \text{ si } i>k}\\
&= \boxed{\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{n}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}.}
\end{aligned}$$

6. (a) Avec $1\leqslant i\leqslant k\leqslant n$, on a :

$$i\binom{k}{i}=i\frac{k!}{i!(k-i)!}=\frac{k!}{(i-1)!(k-i)!}.$$

On a également :

$$k\binom{k-1}{i-1}=k\frac{(k-1)!}{(i-1)!((k-1)-(i-1))!}=\frac{k!}{(i-1)!(k-i)!}.$$

Et donc :

$$\boxed{i\binom{k}{i}=k\binom{k-1}{i-1}.}$$

(b) Comme Y a un univers image fini, Y admet une espérance. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} iP(Y=i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{n}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\left(i\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\left(k\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}\right) \text{ (en appliquant la formule précédente)}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(k\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}\right) \text{ (en intervertissant les sommes de la somme triangulaire)}\\
&= \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}\right)}
\end{aligned}$$

(c) Commençons par calculer :

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}=\sum_{i'=0}^{k-1}\binom{k-1}{i'}p^{i'+1}q^{k-(i'+1)}=p\sum_{i'=0}^{k-1}\binom{k-1}{i'}p^{i'}q^{(k-1)-i'}=p(p+q)^{k-1}=p.$$

Puis :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(kp)=\frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{p}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{p(n+1)}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{E(Y)=\frac{p(n+1)}{2}.}$$

7. (a) De la même manière, comme Y a un univers image fini, $E(Y(Y-1))$ existe. D'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \sum_{i=1}^{n} i(i-1)P(Y=i)\\
&= \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\left(\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{n}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}\right)\\
&\ (i(i-1)=0 \text{ pour } i=1)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\left(i(i-1)\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=i}^{n}\left(k(i-1)\binom{k-1}{i-1}p^i(1-p)^{k-i}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=i}^{n}\left(k(k-1)\binom{k-2}{i-2}p^i(1-p)^{k-i}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{k}\left(k(k-1)\binom{k-2}{i-2}p^i(1-p)^{k-i}\right)\\
&= \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i(1-p)^{k-i}\right).}
\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i(1-p)^{k-i} &= \sum_{i'=0}^{k-2}\binom{k-2}{i'}p^{i'+2}(1-p)^{k-(i'+2)}\\
&= p^2\sum_{i'=0}^{k-2}\binom{k-2}{i'}p^{i'}(1-p)^{(k-2)-i'}\\
&= p^2(p+(1-p))^{k-2}=p^2.
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i(1-p)^{k-i}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)p^2 \\ &= \frac{1}{n}p^2\left(\sum_{k=2}^{n}k^2-\sum_{k=2}^{n}k\right) \\ &= \frac{1}{n}p^2\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right) \\ &= \frac{p^2}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{p^2(n+1)}{6}(2n+1-3) \\ &= \frac{p^2(n+1)}{3}(n-1) \\ &= \boxed{\frac{(n^2-1)p^2}{3}.} \end{aligned}$$

(c) Pour $n=1$, on a vu que Y prend uniquement les valeurs 0 ou 1. Donc $Y(Y-1)$ est la variable certaine égale à 0. Et ainsi :

$$E(Y(Y-1))=0.$$

Or pour $n=1$, on a :

$$\frac{(n^2-1)p^2}{3}=0.$$

Donc $\boxed{\text{l'expression reste valide pour } n=1.}$

(d) D'après la formule de Kœnig-Huygens, on a :

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2.$$

Or :

$$E(Y(Y-1))=E(Y^2-Y)=E(Y^2)-E(Y).$$

Donc :

$$\boxed{V(Y)=E(Y(Y-1))+E(Y)-E(Y)^2=E(Y(Y-1))-E(Y)(E(Y)-1).}$$

Exercice 2 - EDHEC ECE 2004 (Exercice 1)

1. $t\mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[0,1]$ quel que soit n· Donc u_n est bien défini.
2. On a :

$$\boxed{u_0=\int_0^1\frac{1}{2+t}\mathrm{d}t=[\ln(2+t)]_0^1=\ln(3)-\ln(2)=\ln\left(\frac{3}{2}\right).}$$

On a également :

$$\boxed{u_1=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^1}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{1+2t}\mathrm{d}t=\left[\frac{\ln(1+2t)}{2}\right]_0^1=\frac{\ln(3)-\ln(1)}{2}=\frac{\ln(3)}{2}.}$$

3. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \int_0^1\frac{1}{1+t+t^{n+1}}\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1\left(\frac{1}{1+t+t^{n+1}}-\frac{1}{1+t+t^n}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $t \in [0,1]$, on a :

$$t^{n+1} \geqslant t^n$$

et donc $1+t+t^{n+1} \geqslant 1+t+t^n$ et ainsi :

$$\frac{1}{1+t+t^{n+1}} - \frac{1}{1+t+t^n} \geqslant 0.$$

Puis par positivité de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens, on a :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \geqslant 0.}$$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

(b) On a pour tout $t \in [0,1]$:

$$1+t \leqslant 1+t+t^n.$$

Donc par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

Et donc :

$$\boxed{u_n \leqslant \ln(2).}$$

(c) (u_n) est croissante et majorée. Donc d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\boxed{\ln(2) - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\right)\mathrm{d}t.}$$

(b) On a donc :

$$\ln(2) - u_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+t+t^n-1-t}{(1+t)(1+t+t^n)}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\mathrm{d}t.$$

Or $(1+t)(1+t+t^n) \geqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$. Donc par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens :

$$\boxed{\ln(2) - u_n \leqslant \underbrace{\int_0^1 t^n \mathrm{d}t}_{=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}}.}$$

(c) Comme (u_n) est majorée par $\ln 2$, on a $u_n \leqslant \ln 2$. En combinant avec la question précédente, on a :

$$\underbrace{\ln(2) - \frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)} \leqslant u_n \leqslant \ln(2).$$

Par encadrement, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2).}$$

5. (a) On a :

$$\frac{1}{1+t+t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}.$$

Les termes sont positifs. Donc d'après le critère d'équivalence, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t$ ont même nature.
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente (puisque $n \geqslant 2$). Donc $\boxed{v_n \text{ converge.}}$

(b) On a pour tout $t \geqslant 1$, $0 < 1+t+t^n \geqslant t^n$. Donc :

$$0 < \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{t^n}.$$

Et par croissance (et positivité) de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens, on a :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t.$$

Notons que l'intégrale de droite converge bien.
Soit $A > 1$. On a :

$$\int_1^A \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{-n+1}}{n-1}\right]_1^A = \frac{1}{n-1} - \frac{A^{1-n}}{n-1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{n-1}.$$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1}$. Puis :

$$\boxed{0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n-1}.}$$

(c) Par encadrement, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.}$$

Puis par relation de Chasles, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t = u_n + v_n.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \ln(2)+0 = \ln(2).}$$

Exercice 3 - ECRICOME ECE 2020 (Exercice 1 - adapté)

Partie I - Étude du cas où $a = 1$.

1. Pour $a = 1$, on a :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 1-1 & -1 \\ 1-1 & 1 & 1-1 \\ 1 & 1-1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Donc :

$$\boxed{(M-I_3)^2 = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. Ainsi $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ est un polynôme annulateur de M.
3. On a :

$$M^2 - 2M + I_3 = 0$$

Donc :

$$M(2I_3 - M) = I_3.$$

Et de même $(2I_3 - M)M = I_3$. Donc $\boxed{M \text{ est inversible}}$ et :

$$\boxed{M^{-1} = 2I_3 - M.}$$

Partie II - Étude du cas où $a = 0$.

4. On a désormais :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0-1 & -1 \\ 1-0 & 0 & 0-1 \\ 1 & 0-1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in E_1(M) & \Leftrightarrow MX = X \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z & = & x \\ x - z & = & y \\ x - y & = & z \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow x = y + z \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et ainsi $\boxed{\text{est bien un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $E_1(M)$. De plus, en tant que famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base } E_1(M).}$ Et ainsi :

$$\boxed{\dim E_1(M) = 2.}$$

5. On peut par exemple remarquer que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$. Dit autrement :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$ (sinon la seule solution à $MX = 0$ serait $X = 0$).

6. On procède comme précédemment. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_0(M) & \Leftrightarrow & MX = 0 \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - z & = & 0 \\ x - z & = & 0 \\ x - y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \\ -y + z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{array}$$

Donc $E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et ainsi $\boxed{\text{est bien un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $E_0(M)$. De plus, en tant que famille de un vecteur non nul, elle est libre. Donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base } E_0(M).}$ Et ainsi :

$$\boxed{\dim E_0(M) = 1.}$$

7. On considère la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha + \gamma \\ \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha + \gamma & = & 0 \\ \beta + \gamma & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ -\beta & = & 0 \\ \beta + \gamma & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \alpha = \beta = \gamma = 0.
\end{array}$$

Donc la famille est libre. Comme elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, $\boxed{\text{elle est en fait une base de } \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

Partie III - Étude du cas où a est différent de 0 et de 1.

8. Les calculs sont identiques à ceux de la question précédente.
9. f est l'application canoniquement associée à M. Calculons donc :

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a-1-1 \\ 1-a+a+a-1 \\ 1+a-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(u) = au.}$$

De même, on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-a+a-1 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(v) = v.}$$

10. On calcule :

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a-1 \\ 1-a+a \\ 1+a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(w) = a \times v + 1 \times w.}$$

11. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan. On a :

$$\begin{array}{rcc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Donc P est inversible et :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

12. Calculons :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Plusieurs constats sont possibles. En voici deux qui me paraissent visibles :
- La matrice obtenue est triangulaire.
- Les coefficients obtenus sont ceux qui sont apparus dans les calculs de $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.

Problème 4 - EDHEC ECE 2021 (Problème)

Partie I - Un jeu naïf.

1. **Étude de la première manche.**

(a) X_1 et Y_1 sont les rangs de premiers succès dans des répétitions d'épreuve de Bernoulli indépendantes. X_1 est le rang du premier pile pour A et Y_1 le rang du premier pile pour B.
Donc $\boxed{X_1 \text{ et } Y_1 \text{ suivent tous deux une loi géométrique de paramètre } p.}$
Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) = 1$ (et pareil pour Y_1), il est quasi-certain que le joueur A obtienne pile au bout d'un moment (pareil pour le joueur B). Donc il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement.

(b) On a :

$$\boxed{E_1 = [X_1 = Y_1]}$$

puisque avoir égalité au bout d'une seule manche signifie que le rang d'obtention de piles pour les deux joueurs a été le même.

(c) En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1 = i])_{i\in\mathbb{N}^\star}$, on a :

$$\begin{aligned} P(E_1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(E_1 \cap [X_1 = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([X_1 = Y_1] \cap [X_1 = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([Y_1 = i] \cap [X_1 = i]) \\ &= \boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_1 = i)P(X_1 = i).} \text{ (indépendance)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(E_1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_1 = i)P(X_1 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1}p(1-p)^i \\ &= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty}((1-p)^2)^{i-1} \\ &= p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} \text{ (car } |1-p| < 1) \\ &= \frac{p^2}{2p-p^2} \\ &= \boxed{\frac{p}{1+q}.} \end{aligned}$$

(d) La situation étant parfaitement symétrique entre les joueurs A et B, $\boxed{\text{on a } P(G_1) = P(H_1).}$
Or $\overline{E_1} = G_1 \cup H_1$ puisque il n'y a pas égalité à la première manche si et seulement si l'un des deux joueurs emportent la manche. Donc :

$$1 - P(E_1) = P(G_1) + P(H_1)$$

par incompatibilité de G_1 et H_1. Comme $P(G_1) = P(H_1)$, on en déduit :

$$\boxed{P(G_1) = \frac{1-P(E_1)}{2} = \frac{1-\frac{p}{1+q}}{2} = \frac{1+q-p}{2(1+q)} = \frac{1+q-1+q}{2(1+q)} = \frac{q}{1+q}.}$$

2. **Calcul de la probabilité de l'événement G.**

(a) Pour que A l'emporte à la $n^{\text{ème}}$ manche (c'est-à-dire pour que G_n soit réalisé), il faut et il suffit qu'il y ait égalité $n-1$ premières manches et que la A obtienne pile plus rapidement que B à la $n^{\text{ème}}$ manche. Ainsi :

$$\boxed{G_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap [X_n < Y_n].}$$

(b) On a :

$$\boxed{P_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k) = P(E_1) = \frac{p}{1+q}.}$$

puisque une fois les $k-1$ premières manches passées avec égalité, l'indépendance des lancers fait que la probabilité d'égalité est la même qu'au départ.
Ensuite par la formule des probabilités composées :

$$P(G_n) = P(E_1)P_{E_1}(E_2)\cdots P_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-2}}(E_{n-1})P_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}(X_n < Y_n).$$

Or $P_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}(X_n < Y_n) = P(X_1 < Y_1)$ pour la même raison que précédemment. Donc :

$$\boxed{P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.}$$

(c) Pour $n = 1$, on a $P(G_1) = \frac{q}{1+q}$ et $\left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q}$, donc la formule reste valable.

(d) On a :

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n.$$

Par incompatibilité, on a :

$$\boxed{P(G)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\frac{q}{1+q}=\frac{q}{1+q}\frac{1}{1-\frac{p}{1+q}}=\frac{q}{1+q}\times\frac{1+q}{1+q-p}=\frac{1}{2}.}$$

La raison de la somme des termes d'une suite géométrique est bien entre -1 et 1 (strictement) car c'est une probabilité et $p\in]0,1[$.

(e) On peut procéder aux mêmes calculs avec $H=\bigcup_{n=1}^{+\infty}H_n$. Par symétrie, on trouverait $\boxed{P(H)=\frac{1}{2}.}$

Donc $\boxed{P(E)=P(\overline{G\cup H})=1-P(G)-P(H)=0.}$

$\boxed{\text{Donc, presque sûrement, le jeu s'arrête.}}$

Partie II - Un autre jeu.

3. (a) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1=i])_{i\in\mathbb{N}^\star}$:

$$\begin{aligned}
P(Y_1=X_1+1) &= \sum_{i=1}^{+\infty}P([Y_1=X_1+1]\cap[X_1=i])\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}P([Y_1=i+1]\cap[X_1=i])\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}P(Y_1=i+1)P(X_1=i)\ \text{(indépendance)}\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}pq^{i+1-1}pq^{i-1}\\
&= p^2q\sum_{i=1}^{+\infty}(q^2)^{i-1}\\
&= p^2q\frac{1}{1-q^2}\\
&= p^2q\frac{1}{1-(1-p)^2}\\
&= p^2q\frac{1}{2p-p^2}\\
&= \frac{pq}{2-p}=\boxed{\frac{pq}{1+q}.}
\end{aligned}$$

(b) Pour ainsi dire, le même calcul donnerait :

$$P(X_1=Y_1+1)=\frac{pq}{1+q}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
u &= P([Y_1=X_1+1]\cup[X_1=Y_1+1])\\
&= P(Y_1=X_1+1)+P(X_1=Y_1+1)\ \text{(par incompatibilité)}\\
&= \frac{pq}{1+q}+\frac{pq}{1+q}=\boxed{\frac{2pq}{1+q}.}
\end{aligned}$$

4. (a) Comme dans la partie précédente, ganger avec un lancer d'écart, c'est avoir que des égalités et finalement remporter avec un lancer d'écart. Donc :

$$\boxed{K_n=\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}E_k\right)\cap\left([Y_n=X_n+1]\cup[X_n=Y_n+1]\right).}$$

(b) Avec la formule des probabilités composées, on a :

$$P(K_n) = P(E_1)P_{E_1}(E_2)\cdots P_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-2}}(E_{n-1})P_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}([Y_n = X_n+1]\cup[X_n = Y_n+1]).$$

On a :

$$P_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k) = P(E_1) \quad \text{et} \quad P_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}([Y_n = X_n+1]\cup[X_n = Y_n+1]) = P([Y_1 = X_1+1]\cup[X_1 = Y_1+1]) =$$

Donc :

$$\boxed{P(K_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\frac{2pq}{1+q}.}$$

5. On a :

$$K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n.$$

Par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(K) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(K_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\frac{2pq}{1+q} \\ &= \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2pq}{1+q}\times\frac{1}{1-\frac{p}{1+q}} \\ &= \frac{2pq}{1+q}\times\frac{1+q}{1+q-p} \\ &= \frac{2pq}{2q} = \boxed{p.} \end{aligned}$$

Encore une fois, on a bien $\left|\frac{p}{1+q}\right| < 1$.

Partie III - Informatique.

6.

```python
p = int(input("Entrez une valeur pour p"))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y:
    X = rd.geometric(p)
    Y = rd.geometric(p)
    c = c+1
if X < Y:
    print("A a gagné")
else:
    print("B a gagné")
print(c)
```

7.

```python
# On peut aussi utiliser la condition |X−Y| = 1 qui s'écrit :
# np.abs(X − Y) == 1
if (X == Y + 1) or (Y == X + 1):
    print("A gagne le deuxième jeu")
else:
    print("B gagne le deuxième jeu")
```