CORRIGÉ CONCOURS BLANC 1 - MATHS APPROFONDIES

Exercice 1 - Ecricome ECS 2012 (Exercice 1)

1. Soit $A \in \mathbb{R}$. On a :
$$\int_0^A e^{-at}dt = \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^A = \frac{1-e^{-aA}}{a}.$$
Comme $\lim_{A\to+\infty} e^{-aA} = 0$, $\underline{I_a \text{ converge}}$ et $\boxed{I_a = \frac{1}{a}}$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a $x + e^t \underset{t\to+\infty}{\sim} e^t$. Donc $\frac{1}{x+e^t} \sim e^{-t}$. Donc par comparaison d'intégrale de fonctions positives, l'intégrale de $f(x)$ et I_1 ont la même nature. Donc $f(x)$ converge.
2. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$. On a :
$$x + e^t \geq 2\sqrt{xe^t} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{xe^t} + e^t \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 \geq 0.$$
Donc on a bien $\boxed{x + e^t \geq 2\sqrt{xe^t}}$.
On sait déjà que $0 \leq f(x)$ par positivité de l'intégrale. Étudions la seconde inégalité. Sous réserve de convergence, par croissance de l'intégrale, on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^t}dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{xe^t}}dt.$$
Soit $A \in \mathbb{R}$. On a :
$$\int_0^A \frac{1}{2\sqrt{xe^t}}dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^A e^{-\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2\left(1 - e^{-A/2}\right).$$
Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{xe^t}}dt$ converge et : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{xe^t}}dt = \frac{1}{\sqrt{x}}$. D'où effectivement : $\boxed{0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}}$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Calculons :
$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{y+e^t} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}\right) dt \\ &\quad \text{(l'intégrale converge comme somme d'intégrales convergentes)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{y+e^t-x-e^t}{(x+e^t)(y+e^t)}dt = \int_0^{+\infty} \frac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}dt. \end{aligned}$$
Comme $x < y$, l'intégrande est clairement strictement positive et comme elle est également continue, on en déduit :
$$\boxed{0 < f(x) - f(y).}$$
De plus :
$$\int_0^{+\infty} \frac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}dt = (y-x)\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)(y+e^t)}.$$
Or $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Donc $(x+e^t)(y+e^t) \geq e^t \times e^t \geq e^{2t}$. On en déduit :
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)(y+e^t)} \leq \int_0^{+\infty} e^{-2t}dt$$
où la seconde intégrale est bien convergente puisque c'est I_2. Ainsi :
$$\boxed{f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}.}$$

4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $x > x_0$, on a :
$$0 \leq f(x_0) - f(x) \leq \underbrace{\frac{x - x_0}{2}}_{\xrightarrow[x \to x_0^+]{} 0}$$
Donc par encadrement $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
De plus, si $x < x_0$, on a :
$$0 \leq f(x) - f(x_0) \leq \underbrace{\frac{x_0 - x}{2}}_{\xrightarrow[x \to x_0^-]{} 0}$$
Donc par encadrement $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
D'où $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Donc f est continue en x_0 et f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
De plus f est strictement décroissante puisque $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ d'après la question précédente.
Comme f est continue et strictement décroissante sur un intervalle, le théorème de la bijection s'applique.
Cherchons les limites. On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 < f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Et pour l'autre limite, il suffit d'évaluer :
$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{0 + \mathrm{e}^t} \mathrm{d}t = I_1 = 1.$$
Donc f est bien une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.

5. Soit ψ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par $\psi(x) = f(x) - x$. Comme f est strictement décroissante, ψ l'est également (comme somme de fonctions strictement décroissantes). De plus ψ est continue. Le théorème de la bijection s'applique.
On a $\lim_{x \to 0} \psi(x) = \psi(0) = f(0) - 0 = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = -\infty$ puisque $f(x) \to 0$ et $-x \to -\infty$.
Donc ψ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]-\infty, 1]$. Il y a donc un unique antécédent à $0 \in]-\infty, 1]$ dans $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire il y a une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ à $f(x) = x$. On la note α.
De plus $\alpha = f(\alpha)$ et $f(\mathbb{R}_+) =]0, 1]$. Donc $\boxed{\alpha \in]0, 1]}$.

6. (a) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : H_n : « $|\alpha - u_n| \leq 2^{-n}$ ».
   - **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $|\alpha - u_0| = |\alpha - 0| = |\alpha| \in]0, 1]$.
     Et on a $2^{-0} = 1$. Donc on a bien $|\alpha - u_0| \leq 2^{-0}$ c'est-à-dire H_0 est vraie.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n. Montrons H_{n+1}.
     On a :
$$\begin{aligned} |\alpha - u_{n+1}| &= |\alpha - f(u_n)| \\ &= |f(\alpha) - f(u_n)| \end{aligned}$$
     Si $\alpha < u_n$ alors $|f(\alpha) - f(u_n)| = f(u_n) - f(\alpha) \leq \frac{u_n - \alpha}{2} \leq \frac{|\alpha - u_n|}{2}$.
     Si $\alpha > u_n$ alors $|f(\alpha) - f(u_n)| = f(\alpha) - f(\alpha) \leq \frac{\alpha - u_n}{2} \leq \frac{|\alpha - u_n|}{2}$.
     Si $\alpha = u_n$, l'inégalité est triviale.
     Donc :
$$\begin{aligned} |\alpha - u_{n+1}| &= |f(\alpha) - f(u_n)| \\ &\leq \frac{|\alpha - u_n|}{2} \\ &\leq \frac{2^{-n}}{2} \\ & \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &\leq 2^{-(n+1)}. \end{aligned}$$
     Donc H_{n+1} est vraie.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}.}$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.}$$

(b)

```python
def suite(eps):
    N = 0
    u = 0
    while 1/(2**N) > eps:
        N = N+1
        u = ecricome(u)
    return u
```

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) + hg(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+h+\mathrm{e}^t} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t} + h\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+\mathrm{e}^t)^2} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{(x+\mathrm{e}^t)^2 - (x+\mathrm{e}^t)(x+h+\mathrm{e}^t) + h(x+h+\mathrm{e}^t)}{(x+h+\mathrm{e}^t)(x+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t \\
&\quad \text{(l'intégrale est bien convergente comme somme)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{h^2}{(x+h+\mathrm{e}^t)(x+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t = h^2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+h+\mathrm{e}^t)(x+\mathrm{e}^t)^2}.
\end{aligned}$$

Or comme $x > 0$ et $x + h > 0$, on a $(x+h+\mathrm{e}^t)(x+\mathrm{e}^t)^2 > \mathrm{e}^{3t}$. Donc :

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x) + hg(x)| &= h^2 \left| \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+h+\mathrm{e}^t)(x+\mathrm{e}^t)^2} \right| \\
&\leq h^2 \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{(x+h+\mathrm{e}^t)(x+\mathrm{e}^t)^2} \right| \mathrm{d}t \\
&\leq h^2 \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{3t}} \leq h^2 I_3 \boxed{\leq \frac{h^2}{3}.}
\end{aligned}$$

On a donc pour $h \neq 0$:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + g(x) \right| \leq \frac{h}{3}.$$

Donc par encadrement :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -g(x).$$

Ainsi <u>f est bien dérivable en $x \in \mathbb{R}_+^\star$</u> et $\boxed{f'(x) = -g(x)}$.

8. T est dérivable comme produit et pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$T'(x) = f(x) + xf'(x) = f(x) - xg(x).$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
T'(x) &= f(x) - xg(x) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t} - x\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+\mathrm{e}^t)^2} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{(x+\mathrm{e}^t) - x}{(x+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t \\
&\quad \text{(l'intégrale est convergente comme somme)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(x+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Soit $A \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{e}^t}{(x+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{(x+\mathrm{e}^t)}\right]_0^A = \frac{1}{x+1} - \underbrace{\frac{1}{x+\mathrm{e}^A}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0}.$$

Donc :

$$\boxed{T'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(x+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x}.}$$

T est donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et ainsi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$T(x) = \ln|1+x| + k = \ln(1+x) + k.$$

Or $T(0) = 0 \times f(0) = 0$. Et $\ln(1+0) + k = k$. Donc $k = 0$. Ainsi $\boxed{T(x) = \ln(1+x)}$.

Exercice 2 - EDHEC ECS 2015 (Exercice 1)

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est généralisée uniquement en $+\infty$. On a :

$$\frac{1}{x^n(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^n x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+1}}.$$

On a $n \in \mathbb{N}^\star$ donc $n+1 \geqslant 2$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}}$ est une intégrale de Riemann convergente.

Par équivalence de fonctions positives, $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est également convergente.}}$

2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1)-bx}{x(x+1)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a-b)x+a}{x(x+1)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ 1 = (a-b)x+a\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ (a-b)x+(a-1) = 0.
\end{aligned}$$

Or le seul polynôme qui a une infinité de racines est le polynôme nul donc on peut poursuivre :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} a-b &=& 0\\ a-1 &=& 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} a &=& 1\\ b &=& 1\end{array}\right..
\end{aligned}$$

Donc l'unique solution est donnée par :

$$\boxed{\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.}$$

(b) Pour $A \in [1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} &= \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\
&= [\ln(x) - \ln(x+1)]_1^A\\
&= \ln(A) - \ln(A+1) + \ln(2)\\
&= \ln \underbrace{\frac{2A}{A+1}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}2}\\
&\xrightarrow[A\to+\infty]{} \ln(2).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{I_1 = \ln(2).}$$

3. (a) On fixe $n \geqslant 2$. On a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 < x^n(x+1) \geqslant 2x^n$. Donc :

$$0 < \frac{1}{x^n(x+1)} \leqslant \frac{1}{2x^n}.$$

Comme on suppose $n \geqslant 2$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^n}\mathrm{d}x$ converge et donc par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}}_{=I_n} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^n}\mathrm{d}x.$$

Or pour $A \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^A \frac{1}{2x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^A = \frac{1-A^{1-n}}{2(n-1)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2(n-1)}.$$

D'où enfin :

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.}$$

(b) Par encadrement, (I_n) converge et on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Puisque les intégrales convergent, on peut directement calculer :

$$\begin{aligned}
I_n + I_{n+1} &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}(x+1)} \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}} \\
&= \boxed{\frac{1}{n}.}\ \text{(calcul de la question précédente)}
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $x^{n+1} \leqslant x^n$. On a donc :

$$\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)}.$$

Puis par croissance de l'intégrale :

$$I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}\mathrm{d}x = I_n.$$

Donc $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante.}}$

(c) On a $I_n \geqslant I_{n+1}$ Donc $2I_n \geqslant \underbrace{I_n + I_{n+1}}_{=\frac{1}{n}}$ et ainsi :

$$I_n \geqslant \frac{1}{2n}.$$

En combinant avec une inégalité déjà trouvée, on a :

$$\frac{1}{2n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$

En divisant par $\frac{1}{2n} > 0$, on obtient :

$$1 \leqslant \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} \leqslant \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}.$$

Par encadrement, on a donc $\frac{I_n}{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

Par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} I_n$ est de même nature que la série harmonique, c'est-à-dire $\boxed{\text{divergente.}}$

5. (a) L'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a :

$$\frac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+2}}.$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+2}}\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente pour $n \geqslant 0$. Donc par équivalence de fonctions positives, $\boxed{J_n \text{ est convergente.}}$

(b) On a pour $A \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{A+1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\boxed{J_0 = \frac{1}{2}.}$$

6. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
J_k + J_{k-1} &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k(x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{k-1}(x+1)^2} \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^k(x+1)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k(x+1)}\mathrm{d}x \\
&= \boxed{I_k.}
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(J_k + J_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n ((-1)^{k-1}J_{k-1} - (-1)^k J_k) \\
&= (-1)^{1-1}J_{1-1} - (-1)^n J_n \\
&= J_0 + (-1)^{n-1}J_n \boxed{= \frac{1}{2} + (-1)^{n-1}J_n.}
\end{aligned}$$

(c) Soit $n \geqslant 2$. Pour $x \geqslant 1$, on a $x+1 \geqslant 2$ et donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{4x^n}.$$

Par croissance de l'intégrale (tout converge car $n \geqslant 2$), on a :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)^2} \leqslant \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^n}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{4(n-1)}}.$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{4(n-1)}.}$$

Puis par encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

(d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \underbrace{J_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \frac{1}{2}$$

donc la série de terme générale $(-1)^{n-1} I_n$ converge et :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{2}.}$$

7.

```python
def suites(n):
    I = np.log(2)
    J = 1/2
    J = I - J
    for k in range(2,n+1):
        I = 1/(k-1) - I
        J = I - J
    return I, J
```

Exercice 3 - EDHEC ECS 2018 (Sujet 1 - Exercice 2)

Partie I

1. Calculons :

$$\begin{aligned}
A^2 - (a+d)A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad & ab+bd-ab-bd \\ ac+cd-ac-cd & bc+d^2-ad-d^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} \\
&= \boxed{(bc-ad)I_2.}
\end{aligned}$$

2. (a) Soit A nilpotente d'indice k. Calculons de deux manières $(A^2-(a+d)A)A^{k-1}$. D'après la question précédente :
$$(A^2-(a+d)A)A^{k-1}=(bc-ad)I_2\times A^{k-1}=(bc-ad)A^{k-1}.$$
Et on a aussi :
$$(A^2-(a+d)A)A^{k-1}=A^{k+1}-(a+d)A^k=A\times 0-(a+d)\times 0=0.$$
Donc $(bc-ad)A^{k-1}=0$. Or $A^{k-1}\neq 0$ donc $bc-ad=0$ que l'on peut aussi écrire $\boxed{ad-bc=0}$.

(b) Il suffit de montrer que $k\neq 1$. Or si $k=1$, on a $A^1=0$ c'est-à-dire $A=0$ et donc A serait la matrice nulle ce qui est explicitement exclus par l'énoncé. Donc $k\neq 1$ et ainsi $\boxed{k\geq 2}$.

(c) Comme $k\geq 2$, on peut calculer : $(A^2-(a+d)A)A^{k-2}$ encore une fois de deux manières différentes. On a d'abord :
$$(A^2-(a+d)A)A^{k-2}=(bc-ad)I_2\times A^{k-2}=0$$
puisque $ad-bc=0$. Et d'autre part :
$$(A^2-(a+d)A)A^{k-2}=A^k-(a+d)A^{k-1}=-(a+d)A^{k-1}.$$
On a donc :
$$-(a+d)A^{k-1}=0.$$
Or encore une fois A^{k-1} est non nul donc $\boxed{a+d=0}$.

3. Montrons cela par double implication.
($\Rightarrow$) Soit A non nulle nilpotente d'indice kAlors d'après ce qui précède, on a $ad-bc=0$ et $a+d=0$. Utilisons ces égalités dans le résultat de la première question :
$$A^2-(a+d)A=(bc-ad)I_2$$
peut donc s'écrire :
$$A^2-0\times A=-0\times I_2$$
c'est-à-dire :
$$\boxed{A^2=0}$$
qui est directement le résultat attendu.
($\Leftarrow$) Soit A non nulle telle que $A^2=0$. On a $A^1\neq 0$ puisque non nulle. Donc A est bien nilpotente (et même nilpotente d'indice 2).

Partie II

4. (a) Soit $x\in E$. On a $f(x)\in \mathrm{Im}(f)$. Donc $f(x)\in\ker(f)$. Et ainsi $\boxed{f(f(x))=0}$.

(b) Soit f une application non nulle telle que $f^2=0$. Soit $x\in\mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $y\in E$ tel que $x=f(y)$. Donc :
$$f(x)=f(f(y))=f^2(y)=0.$$
Donc $x\in\ker(f)$.
D'après le théorème du rang, on a :
$$\dim\ker(f)+\dim\mathrm{Im}(f)=\dim E=2.$$
On a uniquement trois possibilités pour les dimensions :
- $\dim\ker(f)=0$ et dans ce cas $\dim\mathrm{Im}(f)=2$, mais c'est impossible car $\mathrm{Im}(f)\subset\ker(f)$.
- $\dim\ker(f)=2$ et dans ce cas $\dim\mathrm{Im}(f)=0$, mais c'est impossible car f est non nulle.
- $\dim\ker(f)=1$ et dans ce cas $\dim\mathrm{Im}(f)=1$.

On est donc dans le dernier cas et $\boxed{\mathrm{rg}(f)=\dim\mathrm{Im}(f)=1}$.
Comme dit ci-dessus, d'après le théorème du rang, on a en conséquence $\dim\ker(f)=1$. Par égalité des dimensions, on a donc $\boxed{\mathrm{Im}(f)=\ker f}$.

(c) Procédons par double implication et commençons par le sens le plus simple.
($\Leftarrow$) Soit f telle que $\ker(f) = \text{Im}(f)$. On a donc $f^2 = 0$. Comme f est non nul, on en déduit que f est nilpotent (d'indice 2).
($\Rightarrow$) Soit f nilpotent d'indice k. Soit B une base de E. On note A la matrice de f dans la base B. Puisque $f^k = 0$ (et $f^{k-1} \neq 0$), on a $A^k = 0$ (et $A^{k-1} \neq 0$). Donc A est également nilpotente d'indice k. Or A est une matrice 2×2 non nulle (car représentant un endomorphisme non nul d'un espace de dimension 2), donc la première partie s'applique et A nilpotente implique $A^2 = 0$. Et donc on a $f^2 = 0$.
Et donc $\boxed{\text{Im}(f) = \ker f}$ d'après la question précédente.

5. **Question difficile mais classique**
Travail au brouillon : Le travail commence au brouillon. On nous demande de montrer une existence. C'est donc une question dure et il va falloir fournir une solution. Pour cela, il faut que l'on développe notre intuition d'à quoi peut ressembler cette base.
Ce n'est pas une analyse-synthèse car la solution n'est pas unique. Mais l'étape de brouillon ressemble beaucoup à une analyse : on suppose l'existence et on essaie de voir si on ne peut pas trouver des propriétés intéressantes sur la base.
Admettons donc qu'une telle base existe. Notons-la (e_1, e_2). On a d'après la forme de la matrice :
$$f(e_1) = 0 \quad \text{et} \quad f(e_2) = e_1.$$
Un premier point intéressant apparaît : si on connaît e_2, on peut retrouver e_1. Il faut donc juste trouver un e_2 astucieux. On voit d'ailleurs que $f^2(e_2) = f(e_1) = 0$. Donc $e_2 \in \ker f^2$ mais ce n'est pas très surprenant puisque $f^2 = 0$ donc tout vecteur est dans son noyau.
Peut-être qu'on peut revenir à e_1. Ah oui, on a $f(e_1) = 0$ donc $e_1 \in \ker(f)$. Ce n'est pas arbitraire. Peut-on trouver e_2 tel que $e_1 = f(e_2)$? Oui, il suffit que $e_1 \in \text{Im}(f)$. Mais c'est le cas puisque $\ker f = \text{Im}(f)$.
Il semble que tout s'emboîte : on part d'un antécédent d'un élément du noyau. En appliquant une fois f on trouve le deuxième vecteur de la base et en appliquant une seconde fois, on obtient bien zéro. Convaincus au brouillon, on passe à la rédaction.
Rédaction de la réponse : Comme f est nilpotent, on a d'après la question précédente $\ker(f) = \text{Im}(f)$ et tous les deux sont de dimension 1.
Soit $y \in \ker(f) \setminus \{0\}$ un vecteur non nul du noyau. y admet donc un antécédent par f. Notons $y = f(x)$. On pose $B = (f(x), x)$ la famille composée des deux vecteurs x et $f(x)$. On va montrer que B est une base de E.
Comme B est de cardinal 2, il suffit de montrer que B est libre. Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda x + \mu f(x) = 0$.
Montrons que $\lambda = \mu = 0$.
Appliquons f au vecteur $\lambda x + \mu f(x)$. On obtient :
$$\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0.$$
Donc $\lambda f(x) = 0$. Or $f(x) = y$ est non nul. Donc $\lambda = 0$. On en déduite $\mu f(x) = 0$ puis $\mu = 0$.
Donc B est libre et est bien une base par argument dimensionnel.
Il reste à écrire la matrice de f dans la base B. On a :
$$f(f(x)) = f^2(x) = 0 = 0 \times f(x) + 0 \times x$$
et :
$$f(x) = 1 \times f(x) + 0 \times x.$$
Donc la matrice de f dans la base $(x, f(x))$ est bien $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

6. (a)
- $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$: Soit $y \in \text{Im}(f)$. Montrons que $y \in \text{Im}(u)$. Comme $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc $y = u \circ v(x)$. Ainsi $v(x)$ est un antécédent de y par u. Et donc $y \in \text{Im}(u)$.
- $\ker(v) \subset \ker(f)$: Soit $x \in \ker(v)$. Montrons que $x \in \ker(f)$. On calcule :
$$f(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) = u(0) = 0.$$
Donc $x \in \ker(f)$.

(b) Comme u, v et f sont tous des endomorphismes non nuls (sinon on aurait $f = 0$) de E de dimension 2, on a $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(u) = \dim \ker(f) = \dim \ker(v) = 1$.

Par égalité des dimensions, on a bien $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)}$ et $\boxed{\ker(v) = \ker(f)}$.

(c) Or on a aussi $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$ et $\ker(v) = \mathrm{Im}(v)$. Donc :

$$\boxed{\ker(u) = \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(f) = \ker(f) = \ker(v) = \mathrm{Im}(v).}$$

(d) Supposons qu'il existe u et v deux endomorphismes nilpotents tels que $f = u \circ v$. D'après les questions précédentes, $\ker u = \mathrm{Im}(v)$. Soit maintenant $x \in E$. On a :

$$f(x) = u \circ v(x).$$

Or $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$. Donc $v(x) \in \ker(u)$. D'où $u(v(x)) = 0$, c'est-à-dire :

$$f(x) = 0.$$

Donc f est l'endomorphisme nul, ce qui est faux.

Par l'absurde, il n'existe donc pas d'endormorphismes nilpotents u et v tels que $f = u \circ v$.

Problème 4 - Ecricome ECS 2018 (Problème)

Partie I - Variables vérifiant une relation de Panjer

1. (a) Procédons par récurrence sur k. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$H_k \ : \ « \ P(N = k) = \frac{b^k}{k!} P(N = 0). \ »$$

- **Initialisation :** pour $k = 0$, on a : $P(N = k) = P(N = 0)$
  et : $\frac{b^k}{k!} P(N = 0) = \frac{b^0}{0!} P(N = 0) = P(N = 0)$.
  Donc $\boxed{H_0 \text{ est bien vérifiée.}}$
- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose H_k vérifiée. Montrons que H_{k+1} l'est aussi.
  On a $P(N = k+1) = \left(0 + \frac{b}{k+1}\right) P(N = k)$ car N vérifie une relation de Panjer. Donc :

$$P(N = k+1) = \frac{b}{k+1} \times \frac{b^k}{k!} P(N = 0)$$

  d'après l'hypothèse de récurrence. On peut simplifier en : $\boxed{P(N = k+1) = \frac{b^{k+1}}{(k+1)!} P(N = 0).}$

  Donc $\boxed{H_{k+1} \text{ est bien vérifiée.}}$

$\boxed{\text{Par récurrence sur } k\text{, la relation est bien vraie pour tout } k \in \mathbb{N}.}$

(b) On a donc, sous réserve de convergence :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} P(N = 0).$$

La deuxième série est une série exponentielle qui converge pour tout $b \in \mathbb{R}$ (et donc pour $b > 0$). On a donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) = \exp(b) P(N = 0).$$

Or $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) = 1$ car les $[N = k]$ forment un système complet d'événements. Donc $P(N = 0) = \exp(-b)$. On en déduit la loi de N donnée pour $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\boxed{P(N = k) = \frac{b^k}{k!} \mathrm{e}^{-b}.}$$

C'est bien une $\boxed{\text{loi de Poisson de paramètre } b.}$ Son espérance est $\boxed{E(N) = \frac{1}{b}}$ et sa variance est $\boxed{V(N) = \frac{1}{b}}$.

2. (a) Montrons d'abord que $P(N=2)=0$. On a :
$$P(N=2)=\left(a+\frac{b}{2}\right)P(N=1)$$
car N vérifie une relation de Panjer. Puis $b=-2a$. Donc :
$$\boxed{P(N=2)=\left(a+\frac{-2a}{2}\right)P(N=1)=(a-a)P(N=1)=0.}$$
Comme les termes suivants s'obtiennent en multipliant le terme précédent, on a par une récurrence immédiate $\boxed{P(N=k)=0 \text{ pour tout } k\geq 2.}$

(b) Posons $p\in\mathbb{R}$ tel que $1-p=P(N=0)$. Comme $P(N=0)\in[0,1]$, on a $p\in[0,1]$.
Comme $\sum_{k=0}^{+\infty}P(N=k)=1$, on a $P(N=0)+P(N=1)=1$ et donc $P(N=1)=p$. Donc N suit bien une loi de Bernoulli. Il reste à préciser p.
On a $p=P(N=1)=\left(a+\frac{b}{1}\right)P(N=0)=(a-2a)(1-p)=-a(1-p)$. On résout alors l'équation d'inconnue p avec une solution en fonction de a :
$$\begin{aligned} & p=-a(1-p) && \Leftrightarrow \quad p=-a+ap \\ \Leftrightarrow\ & p-ap=-a && \Leftrightarrow \quad (1-a)p=-a \\ \Leftrightarrow\ & p=\frac{-a}{1-a}=\frac{a}{a-1}. \end{aligned}$$
On peut voir ici que $p\in]0,1[$ est garanti par $a<0$ et on comprend donc l'origine de la condition sur a dans l'énoncé. $\boxed{N \text{ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre } p=\frac{a}{a-1}.}$

3. (a) On commence par rappeler la loi de Z. On a pour $k\in[\![0,n]\!]$:
$$P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$
Soit désormais $k\in[\![1,n]\!]$. On a :
$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!(n-(k-1))}{k\times(k-1)!(n-(k-1))!}p^{k-1}\times p(1-p)^{n-(k-1)}\times\frac{1}{1-p} \\ &= \frac{p}{1-p}\times\frac{n-k+1}{k}\times\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)} \\ &= \boxed{\frac{p}{1-p}\times\frac{n-k+1}{k}\times P(Z=k-1)} \end{aligned}$$
où toutes les règles de calcul s'appliquent sans problème car $k\neq 0$.

(b) Remarquons que l'on peut écrire :
$$\frac{p}{1-p}\times\frac{n-k+1}{k}\times=-\frac{p}{1-p}+\frac{\frac{p(n+1)}{1-p}}{k}.$$
Si on pose $\boxed{a=\frac{-p}{1-p}}$ (qui est négatif donc on a bien $a<1$) et $\boxed{b=\frac{p(n+1)}{1-p}}$, les premiers termes de la loi de probabilité de Z semblent bien suivre une relation de Panjer. Il faut encore vérifier que c'est le cas pour $k\geq n+1$.
Vérifions que $P(N=n+1)$ et $P(N=n)$ sont bien correctement relié. Les autres termes ne posent pas problème car ils sont tous nuls et vérifient donc la relation de Panjer ci-dessus.
Calculons :
$$\left(-\frac{p}{1-p}+\frac{\frac{p(n+1)}{1-p}}{n+1}\right)P(N=n)=\left(-\frac{p}{1-p}+\frac{p(n+1)}{(1-p)(n+1)}\right)P(N=n)$$
$$=\left(-\frac{p}{1-p}+\frac{p}{1-p}\right)P(N=n)=0\times P(N=n)=0=P(N=n+1).$$

$\boxed{\text{La relation de Panjer est donc bien vérifiée}}$ pour $k \leq n$ (question précédente) pour $k = n+1$ (voir ci-dessus)et $k > n+1$ (trivial car tous les termes sont nuls).

4. (a) On a $P(N=1) = (a+b)P(N=0)$.
Si $P(N=0) = 0$ alors par une récurrence immédiate, $P(N=k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est impossible car $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) = 1$. Donc $P(N=0) \neq 0$.
Ainsi $a+b = \frac{P(N=1)}{P(N=0)}$. Comme les probabilités sont toutes deux positives, on a $\boxed{a+b \geq 0.}$

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) &= \sum_{k=1}^{m} k\left(a + \frac{b}{k}\right) P(N=k-1) = a\sum_{k=1}^{m} kP(N=k-1) + b\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{k}P(N=k-1)\\ &= \boxed{a\sum_{k'=0}^{m-1}(k'+1)P(N=k') + b\sum_{k'=0}^{m-1} P(N=k')} \text{ avec } k' = k-1.\end{aligned}$$

(c) Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. On a en réordonnant les termes :

$$\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) - a\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k)$$

Et donc $(1-a)\sum_{k=1}^{m-1} kP(N=k) = (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k) - mP(N=m)$.
Ainsi, pour tout $m' \geq 1$ (en posant $m' = m-1$), on a :

$$\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=1}^{m'} kP(N=k) &= (a+b)\sum_{k=0}^{m'} P(N=k) - (m'+1)P(N=m'+1)\\ &\leq (a+b)\sum_{k=0}^{m'} P(N=k) \boxed{\leq (a+b)\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) \leq a+b.}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la suite } \left((1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(N=k)\right)_{m\geq 1} \text{ est majorée.}}$

Comme la suite est croissante (c'est une somme partielle d'une série à termes positifs), elle converge vers un réel. On en déduit que la série de terme général $kP(N=k)$ converge (absolument puisque positive), c'est-à-dire que $\boxed{N \text{ admet une espérance.}}$

Pour calculer l'espérance, on s'appuie sur la relation $\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k)$ valable pour $m \geq 1$. On l'écrit plutôt :

$$\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k).$$

Puis on passe à la limite (qui existe d'après ce qui précède). On a $\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 1$. Et les deux autres sommes ont la même limite (le terme $k=0$ n'a pas d'importance car il vaut 0) et tendent vers $E(N)$. Donc $E(N) = aE(N) + (a+b)$. D'où :

$$\boxed{E(N) = \frac{a+b}{1-a}.}$$

(d) *C'est une question un peu longue à traiter et c'est une redite des deux précédentes.*
On commence par remarquer que :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m} k^2P(N=k) = \sum_{k=1}^{m} k^2\left(a + \frac{b}{k}\right) P(N=k-1)\\ &= a\sum_{k=1}^{m} k^2P(N=k-1) + b\sum_{k=1}^{m} kP(N=k-1) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)^2P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)P(N=k).\end{aligned}$$

Encore une fois, cela permet d'étudier avec $m' = m - 1$:

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m'} k^2 P(N=k) = \sum_{k=0}^{m'}(2a+b)kP(N=k) + b\sum_{k=0}^{m'} P(N=k) - a(m'+1)^2 P(N=m'+1).$$

On a donc $(1-a)\sum_{k=1}^{m'} k^2 P(N=k) \leqslant (2a+b)E(N)+b$. Donc de la même manière que dans la question précédente, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(N=k)$ converge.
On revient alors à :

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 P(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1} k^2 P(N=k) + (2a+b)\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k).$$

En passant à la limite, on obtient : $E(N^2) = aE(N^2) + (2a+b)E(N) + (a+b)$. D'où :

$$E(N^2) = \frac{1}{1-a}\left((2a+b)E(N) + (a+b)\right).$$

Et en utilisant la formule de la question précédente, on obtient :

$$E(N^2) = \frac{1}{1-a}\left((2a+b)\frac{a+b}{1-a} + (a+b)\right) = \boxed{\frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.}$$

(e) N admet un moment d'ordre 2 donc d'après le théorème de Kœnig-Huygens, N admet une variance et :

$$V(N) = E(N^2) - E(N)^2 = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2} - \left(\frac{a+b}{1-a}\right)^2 = \boxed{\frac{a+b}{(1-a)^2}.}$$

(f) L'implication ($\Leftarrow$) découle des propriétés sur les lois de Poisson.
On considère donc l'implication ($\Rightarrow$). Montrons que si $E(N) = V(N)$ alors $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. Supposons $E(N) = V(N)$. D'après les questions précédentes, on a alors :

$$\frac{a+b}{1-a} = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

On trouve alors que $1 - a = 1$ c'est-à-dire que $a = 0$. Comme $a + b \geq 0$, on en déduit que $b \geq 0$.
De plus $b \neq 0$, car sinon $P(N=1) = 0 \times P(N=0) = 0$ et donc $P(N=0) = 1$ ce qui est exclus.
Donc $b > 0$ et on se retrouve dans le cadre de la première question. Et ainsi $\boxed{N \text{ suit bien une loi } \mathcal{P}(b).}$

Partie II - Fonction génératrice

5. Soit $x \in [0,1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq p_k x^k \leq p_k$.
   Or la somme des p_k converge vers 1. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{k\geq 0} p_k x^k$ converge donc bien.
6. Notons déjà que f est $\mathcal{C}^\infty$ puisque $1 - ax \neq 0$ puisque $x \in [0,1]$ et $a \in]0,1[$ et donc la proposition sur les dérivées successives a du sens.
   Montrons la proposition par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$H_k \ : \ « \ \forall x \in [0,1], \ f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}. \ »$$

- **Initialisation :** Pour $k = 0$, on a d'une part :

$$\forall x \in [0,1], \ f^{(k)}(x) = f^{(0)}(x) = f(x) = \boxed{p_0(1-ax)^\alpha}$$

et d'autre part :

$$\forall x \in [0,1], \ k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k} = 0! \times p_0(1-ax)^{\alpha-0} = \boxed{p_0(1-ax)^\alpha.}$$

On a donc bien H_0.

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que H_k est vraie. Montrons que H_{k+1} l'est également.
  Soit $x \in [0,1]$. Calculons :

$$\begin{array}{rcl} f^{(k+1)}(x) & = & (f^{(k)})'(x) \\ & = & k! \times p_k(\alpha - k)(-a)(1-ax)^{\alpha-k-1} \\ & & \text{(Calcul de dérivée)} \\ & = & k! \times p_k\left(\dfrac{-(a+b)}{a} - k\right)(-a)(1-ax)^{\alpha-k-1} \\ & & \text{(Formule de } \alpha\text{)} \\ & = & k!\,(a+b+ak)\,p_k(1-ax)^{\alpha-k-1} \\ & = & k!(a(k+1)+b)p_k(1-ax)^{\alpha-k-1} \\ & = & k!(k+1)\left(a + \dfrac{b}{k+1}\right)p_k(1-ax)^{\alpha-k-1} \\ & & \text{(On sort un } k+1\text{)} \\ & = & \boxed{(k+1)!p_{k+1}(1-ax)^{\alpha-k-1}.} \\ & & \text{(Formule de Panjer)} \end{array}$$

  Donc H_{k+1} est vraie.

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on a bien la formule vérifiée pour tout k.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut donc appliquer la formule de Taylor avec reste intégral en 0 et à l'ordre n. Toujours pour $x \in [0,1]$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

Or pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a : $f^{(k)}(0) = k!p_k(1-a\times 0)^{\alpha-k} = k!p_k$ et de plus pour $t \in [0,1]$: $f^{(n+1)}(t) = (n+1)!p_{n+1}(1-at)^{\alpha-n-1}$. Donc :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + \int_0^x (n+1)p_{n+1}(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t$$

que l'on peut réécrire :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t.}$$

(b) Soit $t \in [0,x]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{c} \dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x-t \leqslant 1-at \text{ (car } 1-at>0\text{)} \\ \Leftrightarrow \quad x-1 \leqslant t(1-a) \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{1-a} \leqslant t \text{ (car } 1-a>0 \text{ puisque } a<1\text{)} \end{array}$$

Or $x-1 \leq 0$ et $t \geq 0$. Donc la dernière inégalité est vraie. On en déduit que effectivement :

$$\boxed{\frac{x-t}{1-at} \leq 1.}$$

Encondrons désormais, pour $t \in [0,x]$ et $n \in \mathbb{N}$ la quantité $(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n$. On a :

$$(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n = (1-at)^{\alpha-n-1}\left(\frac{x-t}{1-at}\right)^n(1-at)^n = (1-at)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1-at}\right)^n.$$

Tous les termes sont positifs et on peut appliquer l'inégalité précédente pour obtenir :

$$0 \leq (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \leq (1-at)^{\alpha-1}.$$

Puis par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), on a :

$$\int_0^x 0\mathrm{d}t \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t \leq \int 0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

D'où effectivement :

$$\boxed{0 \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.}$$

(c) D'après la question précédente, on a :

$$0 \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

Donc en multipliant par $(n+1)p_{n+1} \geq 0$:

$$0 \leq (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t \leq (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

Or N admet une espérance d'après la première partie. Donc la série des np_n converge et ainsi $(n+1)p_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Dans le terme de droite, l'intégrale ne dépend pas de n et donc est une constante. La terme de droite tend donc vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t = 0.}$$

Donc en passant à la limite dans l'équation :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} p_k x^k}_{\to\, G(x)} + \underbrace{(n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t}_{\to\, 0},$$

on obtient : $f(x) = G(x)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{G(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}.}$$

Calculons désormais : $G(1) = p_0(1-a)^{\alpha}$. Mais on a aussi :

$$G(1) = \sum_{k\geq 0} p_k 1^k = \sum_{k\geq 0} p_k = 1.$$

Donc $p_0(1-a)^{\alpha} = 1$. Et on a ainsi : $\boxed{p_0 = (1-a)^{-\alpha}.}$
De même, calculons :

$$\begin{aligned} G'(1) &= p_0\alpha(-a)(1-a\times 1)^{\alpha-1} = (1-a)^{-\alpha}\alpha(-a)(1-a)^{\alpha-1} \\ &= \frac{-a\alpha}{1-a} = \frac{-a\times\frac{-(a+b)}{a}}{1-a} \\ &= \frac{a+b}{1-a}\boxed{= E(N)} \end{aligned}$$

en utilisant l'expression de $E(N)$ trouvée en première partie.

Partie III - Formule de récursivité

8. Notons pour cette question $q = P(X_k = 0)$. q est bien définie car les X_k suivent toutes la même loi.
Les événements $[N = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$ forment un ensemble complet d'événements. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(S=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([S=0]\cap[N=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)P_{[N=k]}(S=0).$$

Remarquons ici que la formule précédente n'est pas entièrement juste : si l'une des probabilités $P(N=k)$ s'annule, alors $P(N=k)P_{[N=k]}(S=0)$ n'est pas défini. Mais dans ce cas, il suffit d'exclure le terme correspondant (qui était nul de toute façon à la ligne précédente).
Commençons par traiter le cas $P(N=k)\neq 0$. On verra comment ajuster la formule pour les autres cas après. On cherche alors à caractériser $S=0$ sachant $N=k$. Distinguons deux possibilités :

- Si $k=0$, alors $S=0$ et donc $P_{[N=k]}(S=0)=1$.
- Si $k\neq 0$, remarquons que, comme les X_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $S=0$ (sachant $N=k$) si et seulement si tous les $X_i=0$ pour $i\in[\![1,k]\!]$. On peut donc écrire :

$$P_{[N=k]}(S=0)=P_{[N=k]}\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right).$$

Détaillons la formule :

$$P_{[N=k]}(S=0)=\frac{P\left([N=k]\cap\left[\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right]\right)}{P(N=k)}.$$

Or les variables sont mutuellement indépendantes. Donc :

$$P_{[N=k]}(S=0)=\frac{P(N=k)\prod_{i=1}^{k}P(X_i=0)}{P(N=k)}=\prod_{i=1}^{k}P(X_i=0)=q^k$$

où on a utilisé la notation $q=P(X_i=0)$.

Ainsu si $P(N=k)\neq 0$, on a :

$$P([S=0]\cap[N=k])=P(N=k)q^k$$

et on remarque que la formule est bien valable pour $k=0$ également.
Revenons maintenant au cas où $P(N=k)=0$. Dans ce cas, on a : $0\leq P([S=0]\cap[N=k])\leq P(N=k)=0$. Donc $P([S=0]\cap[N=k])=0$. D'autre part $P(N=k)q^k=0$. Donc dans tous les cas, on a bien :

$$\boxed{P([S=0]\cap[N=k])=P(N=k)q^k.}$$

Donc on peut écrire :

$$P(S=0)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(N=k)q^k=\sum_{k=0}^{+\infty}p_kq^k=G(q)$$

où on a utilisé la notation $p_k=P(N=k)$ de la partie précédente. On en déduit, dans les notations de l'énoncé :

$$\boxed{P(S=0)=G(P(X_i=0))}$$

où l'on peut choisir arbitrairement la variable X_i puisqu'elles suivent toutes la même loi. On peut aussi l'écrire :

$$\boxed{P(S=0)=\left(\frac{1-aP(X_i=0)}{1-a}\right)^{\alpha}}$$

en utilisant la formule de G et celle de p_0 trouvées dans la partie précédente.

9. (a) Les calculs précédents fonctionnent de manière similaire sauf que cette fois $a=0$ et $b=\lambda$. On obtient donc :

$$P(S=0)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(N=k)q^k.$$

Mais on ne peut pas utiliser la formule de G puisqu'il fallait $a\in]0,1[$. On utilise plutôt le fait que N suit une loi de Poisson de paramètre λ et donc que : $P(N=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.
D'où $P(S=0)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}q^k$. Et ainsi :

$$P(S=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(q\lambda)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{q\lambda}=\boxed{\mathrm{e}^{\lambda(q-1)}.}$$

Et on peut encore l'écrire :

$$\boxed{P(S=0)=\mathrm{e}^{\lambda(P(X_i=0)-1)}.}$$

(b) Dans la fonction `Python`, la condition `rd.random() < 1/2` est réalisée avec une probabilité 1/2. Cette partie simule donc une épreuve de Bernoulli de paramètre 1/2. La boucle `for i in range(1,n+1):` répète n fois cette condition, et le le code `y = y +1` incrémente un compteur qui compte donc le nombre de succès. Les réalisations étant indépendantes, y contient finalement le nombre de succès de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre 1/2. La valeur y renvoyée permet donc de simuler une variable de une loi binomiale de paramètres n et 1/2.

(c) On propose la fonction suivante :

```python
def simulS(mu,n):
    N = rd.poisson(mu)
    if N == 0:
        # Si N vaut 0, il suffit de renvoyer 0
        return 0
    # Sinon, on va simuler X plusieurs fois et
    # on accumule les resultats dans une variable S
    S = 0
    for k in range(1,N+1):
        # Attention, c'est un grand N dans range mais un petit n dans simulX
        S = S + simulX(n)
    return S
```

Noter que l'on peut se passer du `if` initial en remarquant que la boucle ne s'exécute pas si $N = 0$. Cela permet un code légèrement plus compact :

```python
def simulS_v2(mu,n):
    N = rd.poisson(mu)
    S = 0
    # Si N = 0, cette boucle prend range(1,1) qui ne contient aucun
    # élement et donc la boucle ne s'exécute pas laissant S a 0.
    for k in range(1,N+1):
        S = S + simulX(n)
    return S
```

10. (a) Suivons l'indication de l'énoncé et calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$ la quantité $\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i|S_{n+1} = k)$. Commençons par remarquer que cette quantité existe puisque les X_i sont positifs et tous majorés par k presque sûrement sachant $S_{n+1} = k$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i|S_{n+1}=k) &= E\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \middle| S_{n+1}=k\right) \\
&\quad \text{(linéarité de l'espérance)} \\
&= E\left(S_{n+1} \middle| S_{n+1}=k\right) \\
&\quad \text{(définition de } S_{n+1}\text{)} \\
&= k. \text{ (espérance d'une variable aléatoire constante)}
\end{aligned}$$

Or les X_i suivent tous la même loi et ont donc tous la même espérance sachant $S_{n+1} = k$. Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on a donc :

$$E(X_i|S_{n+1}=k) = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} E(X_j|S_{n+1}=k)}{n+1} = \boxed{\frac{k}{n+1}}.$$

(b) Soit $j \in [\![0, k]\!]$. On a par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)P(S_{n+1}=k) = P([S_{n+1}=k] \cap [X_{n+1}=j]).$$

Or $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Donc :

$$\begin{aligned}
& P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)P(S_{n+1}=k) = P([S_n + X_{n+1}=k] \cap [X_{n+1}=j]) \\
= \;& P([S_n + j = k] \cap [X_{n+1}=j]) = P([S_n = k-j] \cap [X_{n+1}=j]) \\
= \;& P(X_{n+1}=j)P_{[X_{n+1}=j]}(S_n = k-j).
\end{aligned}$$

Or S_n et X_{n+1} sont indépendantes (c'est le lemme des coalitions). Donc $P_{[X_{n+1}=j]}(S_n = k-j) = P(S_n = k-j)$. De plus $P(X_{n+1} = j) = P(X_1 = j) = q_j$ car X_1 et X_{n+1} ont la même loi. D'où :

$$\boxed{P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j)P(S_{n+1} = k) = q_j P(S_n = k - j).}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_jP(S_n=k-j) &= \sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)P(S_{n+1}=k)\\ &= P(S_{n+1}=k)\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j).\end{aligned}$$

À ce moment, on constate que l'on peut séparer la somme en deux. On a d'une part :

$$\sum_{j=0}^{k} aP_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j) = a\sum_{j=0}^{k}P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j) = a\times 1.$$

puisque $[X_{n+1} \notin [\![0,k]\!]]$ est quasi-impossible sachant $[S_{n+1} = k]$. Et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{k}\frac{bj}{k}P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j) = \frac{b}{k}\sum_{j=0}^{k} jP_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)\\ =\;& \frac{b}{k}E(X_{n+1}|S_{n+1}=k) = \frac{b}{k}\times\frac{k}{n+1} = \frac{b}{n+1}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_jP(S_n=k-j) = \left(a+\frac{b}{n+1}\right)P(S_{n+1}=k).$$

11. (a) Soit $j \in [\![0,k]\!]$.
Considérons le système complet d'événements $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$. On applique alors la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(S=k-j) &= \sum_{n=0}^{+\infty}P([S=k-j]\cap[N=n]) = \sum_{n=0}^{+\infty}P([S_n=k-j]\cap[N=n])(\text{car } S=S_n \text{ si } N=n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}P(S_n=k-j)P(N=n) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}p_nP(S_n=k-j).}\end{aligned}$$

(car S_n et N sont indépendantes)

(b) On a :

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_jP(S=k-j) = \sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j\sum_{n=0}^{+\infty}p_nP(S_n=k-j)\\ =\;& \sum_{n=0}^{+\infty}p_n\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_jP(S_n=k-j)\end{aligned}$$

(l'interversion des sommes est légitimes puisque toutes les séries de départ convergent)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}p_n\left(a+\frac{b}{n+1}\right)P(S_{n+1}=k) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n+1}P(S_{n+1}=k).}\ \text{(car } N \text{ suit une relation de Panjer)}$$

(c) On considère encore une fois le système complet d'événements $([N=n])_{n\geq 0}$ et on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(S=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P([S=k]\cap[N=n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([S_n=k]\cap[N=n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n=k)P(N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n=k) \\
&\quad \text{(Lemme des coalitions appliqué à l'indépendance de } N \text{ et } S_n\text{)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n P(S_n=k) \boxed{= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1}=k).} \\
&\quad (S_0 = 0 \text{ et } k \geq 1)
\end{aligned}$$

(d) En combinant les deux questions précédentes, on a immédiatement : $P(S=k) = \sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right) q_j P(S=k-j)$.

On isole alors le terme $j=0$: $P(S=k) = aq_0 P(S=k) + \sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right) q_j P(S=k-j)$. Et en résolvant pour $P(S=k)$, on obtient :

$$\boxed{P(S=k) = \frac{1}{1-aq_0}\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right) q_j P(S=k-j).}$$