TD9 - Variables aléatoires à densité

1 Généralités

Exercice 1 ⋆

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$. Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable à densité et en donner une densité.

Exercice 2 ⋆

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T à densité.
2. Déterminer une densité f de T.

Exercice 3 ⋆⋆

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{a}{x\ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

1. À quelle condition sur a, f est-elle une densité ?
2. On suppose la condition précédente vérifiée. Soit X une variable aléatoire à densité de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 4 ⋆⋆

Soit $a > 0$.

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda t e^{-at} & \text{si } \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   soit une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f (avec λ choisi comme déterminé précedemment). Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 5 ⋆⋆

Soit X une v.a.r. de densité : $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Montrer que $Y = X^2$ est une variable à densité et en déterminer une densité.

Exercice 6 - Loi de Pareto ⋆⋆

Soit $a > 0$ et soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(t) = at^{-a-1}$ si $t \in [1, +\infty[$ et $f_a(t) = 0$ sinon.

1. Montrer que f_a est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire ayant f_a pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (b) X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.
   (c) On pose $Y = \ln X$. Déterminer la fonction de répartition de Y. Quelle est la loi de Y ?

2 Espérance et variance

Exercice 7 ⋆⋆

On reprend la variable X de l'exercice 3. Admet-elle une espérance ?

Exercice 8 ⋆⋆

On reprend la variable X de l'exercice 4. Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 9 ⋆⋆

Soit $\alpha > 2$. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{x^\alpha} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable X.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X.
3. Calculer l'espérance de X.

3 Lois usuelles

Exercice 10 ⋆

On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Quelle est la médiane de X ? (valeur de x telle que $F_X(x) = 1/2$)
2. On suppose que la durée d'une conversation téléphonique en minutes suit une loi exponentielle d'espérance 10.
   (a) Vous arrivez à une cabine téléphonique (ça existe encore !) dans laquelle quelqu'un vient d'entrer. Avec quelle probabilité devrez-vous attendre plus de 10 minutes ?
   (b) Vous êtes arrivés depuis 15 minutes. Quelle est la probabilité que vous attendiez au total 25 minutes ?

Exercice 11 ⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(-1, 2)$. Déterminer la loi de $3X - 2Y$.

Exercice 12 ⋆⋆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, n])$, $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$.

Exercice 13 ⋆⋆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y = 1 + \lfloor X \rfloor$.

Exercice 14 ⋆⋆

On reprend la variable T de l'exercice 2. On pose pour tout réel $A > 0$:

$$I(A) = \int_0^A t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Établir :
$$I(A) = -A\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + \sqrt{2\pi}\left(\Phi(A) - \frac{1}{2}\right).$$
2. En déduire la limite de $I(A)$ lorsque $A \to +\infty$.
3. Calculer l'espérance de T.

Exercice 15 ⋆⋆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que X admet des moments de tout ordre et les calculer.

Exercice 16 ⋆⋆

En utilisant des lois normales bien choisies, calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}(t^2+2t+1)} \mathrm{d}t \\ J &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}(t^2+2t+1)} \mathrm{d}t \\ K &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t^2+12t-16} \mathrm{d}t \\ L &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-2t^2+12t-16} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Exercice 17 ⋆⋆

1. Soit $\lambda > 0$ et soit $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Soit enfin F_Z sa fonction de répartition. On admet que $Y = F_Z(Z)$ est une variable aléatoire à densité. Déterminer la loi de Y.
2. Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F_X est une bijection continue strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$. On admet que $Y = F_X(X)$ est une v.a.r. à densité. En déterminer la loi.

Exercice 18 ⋆⋆⋆

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soient λ et μ deux réels strictement positifs. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} q\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ p\mu\mathrm{e}^{\mu x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont f est une densité. Calculer l'espérance $E(X)$.
3. (a) Déterminer les valeurs de p, λ et μ telles que X vérifie :
$$\forall x \geq 0,\ P(X > x) = P(X < -x).$$
   (b) On pose alors $Y = |X|$. Déterminer la loi de Y.
   (c) A-t-on, pour tout réel s et pour tout réel t tel que $t \geq s$:
$$P_{[Y>s]}(Y > t) = P(Y > t - s) \ ?$$
4. Déterminer la fonction de répartition F de X, puis son inverse F^{-1}.

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}_+$, $P(a \leq X < na)$ est-elle maximale ?

Exercice 20 ⋆⋆⋆

Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Étudier l'existence et le cas échéant calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\mathrm{d}t.$$

Exercice 21 - Lois sans mémoire ⋆⋆⋆⋆

Soit X une variable aléatoire. On dit que la loi de X est sans mémoire lorsque :

$$\forall (t,x) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ P(X > t+s) = P(X > t)P(X > s).$$

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Montrer que X est sans mémoire.
2. Soit Y une variable aléatoire réelle de loi sans mémoire. On suppose que $P(Y > 0) > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$: $P(Y > t) > 0$.
3. On définit l'application $f : t \mapsto \ln(P(Y > t))$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = nf(1)$.
   (b) En déduire que pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$: $f(q) = qf(1)$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on admet qu'il existe une suite de rationnels positifs $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_+^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Montrer que $f(x) = xf(1)$.
4. Montrer que Y suit une loi exponentielle.

4 Exercices de concours

Exercice 22 - EDHEC ECS 2018 ⋆⋆⋆

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $Y = \sqrt{X}$.

1. On rappelle qu'en Python, la commande :

```
rd.exponential(1/mu)
```

   du module `numpy.random` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre μ. Écrire une (ou des) commande(s) Python utilisant `rd.exponential` et permettant de simuler Y.
2. (a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
   (b) En déduire une densité f_Y de Y.
3. (a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.
   (b) En déduire que Y possède une espérance et donner sa valeur.
4. On pose $U = 1 - \mathrm{e}^{\frac{X}{2}}$.
   (a) Vérifier que $U(\Omega) = [0,1[$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition F_U de U et reconnaître la loi de U.
   (c) Exprimer X en fonction de U puis en déduire une simulation Python de Y utilisant uniquement la fonction `rd.random`.

Exercice 23 - QSP HEC ECS 2009 ⋆⋆⋆⋆

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0,1]$ et soit $q \in]0,1]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = 1 + \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$. où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

5 Mathématiques approfondies

5.1 Espérance et variance

Exercice 24 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire de densité donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que $Y = \tan(X)$ est une variable à densité et en étudier l'espérance.

Exercice 25 ⋆⋆⋆

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$I_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos(x)\mathrm{d}x.$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)J_n - (2\pi)^{n+1}$ et que $J_{n+1} = -(n+1)I_n$.
   (b) Calculer I_n et J_n pour $n \in [\![0,3]\!]$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2\pi^2}(1-\cos(x))$ si $x \in [0,2\pi]$ et $f(x) = 0$ sinon.
   (a) Montrer que f est une densité d'une variable X.
   (b) Déterminer la fonction de réparation de X.
   (c) Déterminer $E(X)$ si elle existe.
   (d) Calculer les probabilités :
$$P\left(X > \tfrac{\pi}{2}\right),\ P\left(|X-\pi| \leq \tfrac{\pi}{2}\right) \text{ et } P_{\left[X \leq \frac{3\pi}{2}\right]}\left(X \geq \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 26 ⋆⋆⋆

1. (a) Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0,1[$, possédant une densité g continue sur $]0,1[$. Montrer que Z possède une espérance.
   (b) On suppose que pour tout $x \in]0,1[$, $g(1-x) = g(x)$. Quelle est, dans ce cas, l'espérance de Z ?
2. (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$. On note φ sa bijection réciproque.
   (b) Montrer que φ est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.
   (c) Soit $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$. Montrer que cette intégrale converge et la calculer en utilisant un changement de variable affine.
3. (a) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   est une densité de probabilité.
   (b) Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité. Déterminer $E(X)$ en utilisant la première question.
   (c) Retrouver le résultat en utilisant la définition de l'espérance et le changement de variable $x = (\sin(\theta))^2$.

5.2 Loi γ

Exercice 27 ⋆⋆

Soit $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ et soit $Y = \frac{1}{X}$. À quelles conditions sur ν, Y admet-elle une variance ? Dans ce cas, calculer $V(Y)$.

5.3 Exercices de concours

Exercice 28 - Oral ESCP 2019 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit X une variable aléatoire à densité et f une densité de X, supposée continue sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = \frac{1}{X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

1. (a) Exprimer la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de celle de X, notée F_X.
   (b) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité φ de Y.
2. Montrer que Y admet une espérance si et seulement si les intégrales $\int_{-\infty}^0 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ sont convergentes, et qu'on a alors :
$$E(Y) = \int_{-\infty}^0 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$
   On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{1}{y}$.
3. (a) Déterminer le réel α pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = \frac{\alpha}{1+t^2}$ soit une densité de probabilité.
   (b) Soit alors U une variable aléatoire de densité u. Préciser une densité de $U' = \frac{1}{U}$. Les variables U et U' admettent-elles une espérance ?
4. Soit V une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Déterminer une densité de $V' = \frac{1}{V}$. Les variables aléatoires V et V' admettent-elles une espérance ?
5. Peut-on déterminer une densité w telle que si W est une variable aléatoire de densité w et $W' = \frac{1}{W}$, alors W et W' admettent toutes les deux une espérance ?