CB 1 - Maths II ECE 2016

Partie I

1. (a) Pour tout $j \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$[X = j] \cup [X > j] = [X \geqslant j].$$
Or X est à valeurs entières donc :
$$[X \geqslant j] = [X > j-1].$$
Puis :
$$P([X = j] \cup [X > j]) = P(X > j-1).$$
Ainsi par incompatibilité des événements $[X = j]$ et $[X > j]$, on a :
$$P(X = j) + P(X > j) = P(X > j-1)$$
et enfin :
$$\boxed{P(X = j) = P(X > j-1) - P(X > j).}$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On a :
$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} jP(X=j) &= \sum_{j=1}^{p} j\left(P(X > j-1) - P(X > j)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{p} (jP(X > j-1) - jP(X > j))\\
&= \sum_{j=1}^{p} ((j-1+1)P(X > j-1) - jP(X > j))\\
&= \underbrace{\sum_{j=1}^{p} ((j-1)P(X > j-1) - jP(X > j))}_{\text{somme télescopique}} + \sum_{j=1}^{p} P(X > j-1)\\
&= (1-1)P(X > 1-1) - pP(X > p) + \sum_{j=1}^{p} P(X > j-1)\\
&= \boxed{\sum_{j'=0}^{p-1} P(X > j') - pP(X > p)} \text{ avec } j' = j-1.
\end{aligned}$$

2. (a) i. Puisque X admet une espérance, la série de terme général $kP(X = k)$ converge absolument et donc converge.

ii. On a pour tout $N > p$:
$$\sum_{k=p+1}^{N} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{N} kP(X=k) - \sum_{k=1}^{p} kP(X=k).$$
Comme la série de terme général $kP(X = k)$ converge, pour p fixé, on peut prendre la limite quand N tend vers $+\infty$. On obtient :
$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) - \sum_{k=1}^{p} kP(X=k).$$
Puis, pour la même raison :
$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k).$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) - \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = 0.}$$

iii. Pour tout $k > p$, on a :

$$kP(X=k) > pP(X=k)$$

et donc :

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) > \sum_{k=p+1}^{+\infty} pP(X=k)$$

où les deux séries convergent (la première car X admet une espérance, la seconde car c'est à un facteur près la série de terme général $P(X=k)$).
Or $\sum_{k=p+1}^{+\infty} pP(X=k) = p\sum_{k=p+1}^{+\infty} P(X=k) = pP(X>p)$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$:

$$0 \leqslant pP(X>p) < \underbrace{\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k)}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}.$$

Ainsi par encadrement, on a bien :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} pP(X>p) = 0.}$$

iv. On a :

$$\sum_{j=0}^{p-1} P(X>j) = \underbrace{\sum_{j=1}^{p} jP(X=j)}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} E(X)} - \underbrace{pP(X>p)}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[p\to+\infty]{} E(X).$$

Donc $\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j) \text{ converge}}$ (vers $E(X)$).

v. Avec le résultat précédent, on a donc :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j) = E(X) = \mu.}$$

(b) i. (v_p) est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs (car ce sont des probabilités). $\boxed{(v_p) \text{ est donc croissante.}}$

ii. Puis que $\sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j)$ converge, (v_p) a une limite. Comme (v_p) est croissante, elle est inférieure à sa limite et donc pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{j=0}^{p-1} P(X>j) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j).$$

Or :

$$\sum_{j=1}^{p} jP(X=j) = \underbrace{\sum_{j=0}^{p-1} P(X>j)}_{\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j)} - \underbrace{pP(X>p)}_{\geqslant 0}.$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} jP(X=j) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j).}$$

iii. Encore une fois, la suite $\left(\sum_{j=1}^{p} jP(X=j)\right)$ est une suite croissante comme somme partielle d'une série à termes positifs. Elle est majorée d'après la question précédente. Elle converge donc. Ainsi la série de terme général $jP(X=j)$ converge et par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on a :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{+\infty} jP(X=j) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j).}$$

De plus, $jP(X=j) \geqslant 0$ donc la convergence absolue de la série revient à sa convergence usuelle. Et donc $\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$

(c) On vient de montrer les deux implications dans un sens et dans l'autre. Donc effectivement :
$\boxed{X \text{ admet une espérance si et seulement si la série de terme général } P(X>j) \text{ converge.}}$
On peut même préciser que dans ce cas :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j) = E(X) = \mu}$$

grâce à la question 2.

3. (a) On a vu plus haut que pour une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$, on a :

$$P(X=j) = P(X>j-1) - P(X>j).$$

Donc $P(X>j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}$ définit une loi de probabilité si et seulement si $P(X=j) = \frac{1}{(j-1+1)^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha}$ définit une loi de probabilité. C'est le cas si et seulement si :

- $P(X=j) \geqslant 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^\star$. C'est le cas par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^\alpha}$.
- $\sum_{j=1}^{+\infty} P(X=j)$ converge et vaut 1. On le vérifie en passant par les sommes partielles et en utilisant le télescopage :

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{(j-1+1)^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha}\right) = \frac{1}{(1-1+1)^\alpha} - \frac{1}{(N-1+1)^\alpha} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Donc $\boxed{P(X>j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \text{ définit une loi de probabilité.}}$

(b) X admet une espérance si et seulement si $\sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j)$ converge.
Or $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \sum_{j'=1}^{+\infty} \frac{1}{j'^\alpha}$ qui est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha > 1$.
Donc $\boxed{X \text{ admet une espérance si et seulement si } \alpha > 1.}$

(c) Pour tout $j \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned} P(X=j) &= P(X>j-1) - P(X>j) \\ &= \frac{1}{(j-1+1)^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \\ &= \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \\ &= \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha}\right).} \end{aligned}$$

(d) i. f est dérivable sur $[0,1]$ par opérations sur les fonctions usuelles. On a pour tout $x \in [0,1]$:

$$f'(x) = -(-\alpha)(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \alpha\left(\frac{1}{(1+x)^{1+\alpha}} - 1\right).$$

Pour $x > 0$, on a $1+x > 1 > 0$ et donc $0 < \frac{1}{(1+x)^{1+\alpha}} < 1$. Donc $f'(x) < 0$ sur $[0,1]$ et $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0,1].}$

ii. Comme f est décroissante, on a pour $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant f(0) = 0$.
En particulier, pour $x = \frac{1}{j}$ (avec $j \in \mathbb{N}^\star$), on a :

$$1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} - \frac{\alpha}{j} \leqslant 0.$$

Ainsi :

$$1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{j}.$$

Puis :

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha}\right)}_{=P(X=j)} \leqslant \underbrace{\frac{1}{j^\alpha} \times \frac{\alpha}{j}}_{=\frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}}.}$$

(e) On a pour tout $j \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$j^{\alpha+1}P(X=j) = j^{\alpha+1} \times \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha}\right) = j\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha}\right).$$

Or, comme $\frac{1}{j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$, on a :

$$\left(1+\frac{1}{j}\right)^{-\alpha} - 1 \underset{j\to+\infty}{\sim} -\alpha\frac{1}{j}.$$

Ainsi :

$$j^{\alpha+1}P(X=j) \underset{j\to+\infty}{\sim} j \times \alpha \times \frac{1}{j} \underset{j\to+\infty}{\sim} \alpha.$$

Et donc :

$$\boxed{\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}P(X=j) = \alpha.}$$

(f) X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2. D'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si $\sum_{j=1}^{+\infty} j^2 P(X=k)$ converge absolument. Comme tout est positif, cela revient à la convergence usuelle.
D'après la question précédente, on a :

$$j^2P(X=j) \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{j^{\alpha-1}}.$$

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, X admet donc une variance si et seulement si la série de terme général $\frac{\alpha}{j^{\alpha-1}}$ converge.

À un facteur près, c'est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, c'est-à-dire $\boxed{\text{si et seulement si } \alpha > 2.}$

Partie II - Étude de la probabilité de panne un jour donné.

4. (a) On a :

$$A_1 = [X_1 = 1]$$

puisque si un composant tombe en panne à l'instant 1 (événement A_1), il s'agit nécessairement du premier composant.
Ainsi :

$$\boxed{u_1 = P(A_1) = P(X_1 = 1) = p_1.}$$

(b) i. On décompose A_2 sur le système complet $(A_1, \overline{A_1})$:

$$A_2 = (A_2 \cap A_1) \bigcup (A_2 \cap \overline{A_1}).$$

Or par un raisonnement similaire à la question précédente, on a :

- $A_2 \cap A_1 = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$;
- $A_2 \cap \overline{A_1} = [X_1 = 2]$.

Donc :

$$\boxed{A_2 = [X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])\,.}$$

ii. On a donc :

$$\begin{aligned}
u_2 &= P(A_2) \\
&= P\left([X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])\right) \\
&= P(X_1 = 2) + P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \text{ (par incompatibilité)} \\
&= P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) \text{ (par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2\text{)} \\
&= \boxed{p_2 + p_1^2.} \text{ (car } X_1 \text{ e } X_2 \text{ suivent la même loi)}
\end{aligned}$$

(c) i. Les $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots$ sont juste les $X_2, X_3, \ldots$. Elles sont donc mutuellement indépendantes et même indépendantes de X_1. Par hypothèse, elles suivent également la même loi que X_1.

ii. Soit $k < n$. D'après l'énoncé, on a :

$$A_n = \bigcup_{j \geqslant 1} [T_j = n].$$

En effet, dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $[T_k = n]$ est réalisé signifie que l'union est réalisée.

On a alors :

$$\begin{aligned}
A_n \cap [X_1 = k] &= \left(\bigcup_{j \geqslant 1} [T_j = n]\right) \cap [X_1 = k] \\
&= \bigcup_{j \geqslant 1} \left([T_j = n] \cap [X_1 = k]\right) \text{ (par distributivité de } \cup \text{ sur } \cap\text{)} \\
&= \bigcup_{j \geqslant 2} \left([T_j = n] \cap [X_1 = k]\right) \text{ (car } [T_1 = n] \cap [X_1 = k] = [X_1 = n] \cap [X_1 = k] = \varnothing\text{)} \\
&= \bigcup_{j \geqslant 2} \left([X_1 + \cdots + X_j = n] \cap [X_1 = k]\right) \\
&= \bigcup_{j \geqslant 2} \left([k + X_2 + \cdots + X_j = n] \cap [X_1 = k]\right) \\
&= \bigcup_{j \geqslant 2} \left([\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_{j-1} = n - k] \cap [X_1 = k]\right) \\
&= [X_1 = k] \cap \left(\bigcup_{j \geqslant 2} [\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_{j-1} = n - k]\right) \\
&= \boxed{[X_1 = k] \cap \left(\bigcup_{j' \geqslant 1} [\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_{j'} = n - k]\right).} \ (j' = j - 1)
\end{aligned}$$

iii. Pour $1 \leqslant k < n$, on a :

$$\begin{aligned}
P_{[X_1=k]}(A_n) &= \frac{P(A_n \cap [X_1 = k])}{P(X_1 = k)} \\
&= \frac{P\left([X_1 = k] \cap \left(\bigcup_{j\geqslant 1}[\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_j = n-k]\right)\right)}{P(X_1 = k)} \\
&= \frac{P(X_1 = k)P\left(\bigcup_{j\geqslant 1}[\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_j = n-k]\right)}{P(X_1 = k)} \text{ (par indépendance)} \\
&= \sum_{j\geqslant 1} P(\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_j = n-k) \text{ (par incompatibilité)} \\
&= \sum_{j\geqslant 1} P(X_1 + \cdots + X_j = n-k) \text{ (car } (X_1, \ldots, X_j) \text{ a la même loi conjointe que } (\tilde{X}_1, \ldots, \\
&= \sum_{j\geqslant 1} P(T_j = n-k) \\
&= P\left(\bigcup_{j\geqslant 1}[T_j = n-k]\right) \\
&= \boxed{P(A_{n-k}).}
\end{aligned}$$

(d) En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1 = k])_{k\geqslant 1}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)\underbrace{P_{[X_1=k]}(A_n)}_{=0 \text{ si } k>n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k)P_{[X_1=k]}(A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P(X_1 = k)P_{[X_1=k]}(A_n) + P(X_1 = n)P_{[X_1=n]}(A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p_k u_{n-k} + p_n \times \underbrace{1}_{=u_0} \\
&= \boxed{p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \cdots + p_{n-1}u_1 + p_n u_0.}
\end{aligned}$$

(e)

```python
n = len(P)
U = [1]
for k in range(n):
    U.append(0)
    for j in range(k):
        U[k+1] = U[k+1] + P[j]*U[k-j]
print(U[n])
```

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
P(X_1 > k) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X_1 = j) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{j-1} \\
&= \lambda(1-\lambda)^{k+1-1} \times \frac{1}{1-(1-\lambda)} \ (\text{car } -1 < \lambda < 1) \\
&= \boxed{(1-\lambda)^k.}
\end{aligned}$$

(b) On a également :

$$\begin{aligned}
P_{[X_1>k]}(X_1 = k+1) &= \frac{P([X_1 = k+1] \cap [X_1 > k])}{P(X_1 > k)} \\
&= \frac{P(X_1 = k+1)}{P(X_1 > k)} \\
&= \frac{\lambda(1-\lambda)^{k+1-1}}{(1-\lambda)^k} \\
&= \boxed{\lambda.}
\end{aligned}$$

(c) Montrons par récurrence forte que $P(A_n) = \lambda$.

- **Initialisation :** On a $P(A_1) = P(X_1 = 1) = \lambda(1-\lambda)^0 = \lambda$. Donc la propriété est bien initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \lambda$. Montrons que $P(A_{n+1}) = \lambda$.

  On a :

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}) &= u_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} p_k u_{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_k \underbrace{u_{n+1-k}}_{=\lambda} + p_{n+1} \underbrace{u_0}_{=1} \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda(1-\lambda)^{k-1} + \lambda(1-\lambda)^n \\
&= \lambda \times \lambda \times \frac{1-(1-\lambda)^n}{1-(1-\lambda)} + \lambda(1-\lambda)^n \\
&= \lambda\left(1-(1-\lambda)^n + (1-\lambda)^n\right) \\
&= \boxed{\lambda.}
\end{aligned}$$

  La propriété est bien héréditaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\boxed{P(A_n) = \lambda.}$

6. (a) On a $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$ et $p_1 + p_2 = p + (1-p) = 1$. Donc :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 0.$$

Or c'est une somme de termes tous positifs donc pour tout $k \geqslant 3$, on a $\boxed{p_k = 0.}$

(b) Pour $n \geqslant 2$, calculons :

$$M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p u_{n-1} + (1-p) u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Or :

$$u_n = \underbrace{p_1}_{=p} u_{n-1} + \underbrace{p_2}_{=1-p} u_{n-2} + \underbrace{p_3}_{=0} u_{n-3} + \cdots + \underbrace{p_n}_{=0} u_0 = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2}.$$

Donc :

$$\boxed{M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}}$$

(c) i. **Remarque :** Comme c'est une question classique, je vous propose ici la rédaction *rapide* et ne vérifie pas avec la méthode classique que $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est un sous-espace.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_1(M) &\Leftrightarrow MX = X \\
&= \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \left\{ \begin{array}{rcl} px + (1-p)y & = & x \\ x & = & y \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{rcl} px + (1-p)x & = & x \\ x & = & y \end{array} \right. \\
&= x = y \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Donc $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $M_{2,1}(\mathbb{R})$.

De plus, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ en est une famille génératrice. Cette famille est libre comme famille d'un unique vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(M)$. Et donc :

$$\boxed{\dim E_1(M) = 1.}$$

ii. On procède de même et on trouve que $\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_{p-1}(M)$ qui est donc un sous-espace de dimension 1.

iii. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de deux vecteurs non colinéaires (si $p \neq 0$), c'est donc une famille libre de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Par considération sur les dimensions, c'est donc une base de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

iv. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons l'inverse de P par la méthode de Gauss-Jordan. On a :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 0 & 2-p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2-p} L_2}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2-p} & \frac{1}{2-p} \end{pmatrix} \quad \text{(possible car } p \in]0,1[) \\
\underset{L_1 \leftarrow L_1 - (p-1) L_2}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 + \frac{p-1}{2-p} & \frac{1-p}{2-p} \\ -\frac{1}{2-p} & \frac{1}{2-p} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Et donc P est inversible et :

$$\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}1+\frac{p-1}{2-p} & \frac{1-p}{2-p}\\ -\frac{1}{2-p} & \frac{1}{2-p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2-p} & \frac{1-p}{2-p}\\ -\frac{1}{2-p} & \frac{1}{2-p}\end{pmatrix}=\frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ -1 & 1\end{pmatrix}.}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}P^{-1}MP &= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & p-1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & (p-1)^2\\ 1 & p-1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}2-p & 0\\ 0 & (p-1)(2-p)\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p-1\end{pmatrix}.}\end{aligned}$$

v. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on trouve :

$$\boxed{M=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p-1\end{pmatrix}P^{-1}.}$$

vi. On a ainsi pour tout $n\geqslant 1$:

$$M^{n-1}=(PDP^{-1})^{n-1}=\underbrace{PDP^{-1}\times PDP^{-1}\times\cdots\times PDP^{-1}}_{n-1\text{ fois}}=PD^{n-1}P^{-1}.$$

Or $D^{n-1}=\begin{pmatrix}1^{n-1} & 0\\ 0 & (p-1)^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (p-1)^{n-1}\end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}M^{n-1} &= \begin{pmatrix}1 & p-1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (p-1)^{n-1}\end{pmatrix}\frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & (p-1)^n\\ 1 & (p-1)^{n-1}\end{pmatrix}\frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1-(p-1)^n & (1-p)(1-(p-1)^{n-1})\\ 1-(p-1)^{n-1} & (1-p)(1-(p-1)^{n-2})\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ 1 & 1-p\end{pmatrix}+\frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix}1-p & p-1\\ -1 & 1\end{pmatrix} &= \frac{1}{2-p}\left(\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ 1 & 1-p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-(p-1)^n & (p-1)^n\\ -(p-1)^{n-1} & (p-1)^{n-1}\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1-(p-1)^n & (1-p)+(p-1)^n\\ 1-(p-1)^{n-1} & (1-p)+(p-1)^{n-1}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1-(p-1)^n & (1-p)(1-(p-1)^{n-1})\\ 1-(p-1)^{n-1} & (1-p)(1-(p-1)^{n-2})\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{M^{n-1}=\frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ 1 & 1-p\end{pmatrix}+\frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix}1-p & p-1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.}$$

(d) i. Par récurrence immédiate, on a :

$$\forall n\geqslant 1,\ \begin{pmatrix}u_n\\ u_{n-1}\end{pmatrix}=M^{n-1}\begin{pmatrix}u_1\\ u_0\end{pmatrix}=M^{n-1}\begin{pmatrix}p\\ 1\end{pmatrix}$$

et donc en particulier en regardant la première ligne :

$$\boxed{\forall n\geqslant 1, u_n=\frac{1}{2-p}(1\times p+(1-p)\times 1)+\frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}((1-p)\times p+(p-1)\times 1)=\frac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p}.}$$

ii. On a ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p}=\frac{1}{2-p}}$$

car $-1<p-1<0<1$.

Partie III - Étude de la durée de fonctionnement.

7. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T_k) = E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i)$$

et comme les X_i sont identiquement distribuées de même espérance μ, on a :

$$\boxed{E(T_k) = k\mu.}$$

8. (a) Les X_i étant mutuellement indépendants, on a :

$$\boxed{V(T_k) = V(X_1 + \cdots + X_k) = V(X_1) + \cdots + V(X_k) = k\sigma^2.}$$

(b) On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable T_k qui admet bien une variance d'après la question précédente.
On a donc :

$$\forall a > 0,\ P(|T_k - \underbrace{E(T_k)}_{=k\mu}| \geqslant a) \leqslant \frac{\overbrace{V(T_k)}^{=k\sigma^2}}{a^2}.$$

Soit $\epsilon > 0$. En particulier, pour $a = k\epsilon$, on a :

$$\boxed{P(|T_k - k\mu| \geqslant k\epsilon) \leqslant \underbrace{\frac{k\sigma^2}{(k\epsilon)^2}}_{=\frac{\sigma^2}{k\epsilon^2}}.}$$

(c) Commençons par remarquer que :

$$\left[\frac{T_k}{k} \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[\right] = \overline{[|T_k - k\mu| \geqslant k\epsilon]}.$$

Or :

$$0 \leqslant P(|T_k - k\mu| \geqslant k\epsilon) \leqslant \underbrace{\frac{\sigma^2}{k\epsilon^2}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0}.$$

Par encadrement, on a ainsi $P(|T_k - k\mu| \geqslant k\epsilon) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[\right) = \lim_{k\to+\infty} 1 - P(|T_k - k\mu| \geqslant k\epsilon) = 1.}$$

9. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas sont possibles :

- Si $X_i(\omega) \leqslant m$, alors $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega) + 0 = X_i(\omega)$.
- Si $X_i(\omega) > m$, alors $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = 0 + X_i(\omega) = X_i(\omega)$.

Ainsi $\boxed{Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = X_i.}$

(b) i. Posons f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > m, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi $Z_1^{(m)} = f_m(X_1)$. On peut alors appliquer le théorème de transfert (sous réserve de convergence absolue) :

$$E(Z_1^{(m)}) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_m(i)P(X_1 = i) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{f_m(i)}_{=0} P(X_1 = i) + \sum_{i=m+1}^{+\infty} \underbrace{f_m(i)}_{=i} P(X_1 = i).$$

Comme X_1 admet une espérance, $\sum_{i=m+1}^{+\infty} iP(X_1 = i)$ converge absolument. Donc :

$$E(Z_1^{(m)}) = \sum_{i=m+1}^{+\infty} iP(X_1 = i).$$

De plus, on a :

$$P(X_1 = i) \leqslant \frac{\alpha}{i^{1+\alpha}}.$$

Donc :

$$\boxed{E(Z_1^{(m)}) \leqslant \sum_{i=m+1}^{+\infty} \underbrace{i \times \frac{\alpha}{i^{1+\alpha}}}_{=\frac{\alpha}{i^\alpha}}}$$

le membre de droite étant bien convergent puisque $\alpha > 1$.

ii. La fonction $x \mapsto \frac{\alpha}{x^\alpha}$ est décroissante car $\alpha > 1$. En particulier, pour $i > m$ et $x \in [i-1, i]$, on a :

$$\frac{\alpha}{i^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{x^\alpha}.$$

Par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens, on obtient :

$$\underbrace{\int_{i-1}^{i} \frac{\alpha}{i^\alpha} \mathrm{d}x}_{=\frac{\alpha}{i^\alpha}} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x.$$

Puis en sommant, on obtient :

$$\sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha} \leqslant \underbrace{\sum_{i=m+1}^{+\infty} \int_{i-1}^{i} \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x}_{=\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x}.$$

L'intégrale est bien convergente puisque $\alpha > 1$.
En mettant les inégalités bout à bout, on obtient finalement :

$$\boxed{E(Z_1^{(m)}) \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x.}$$

iii. Soit $A > m$. On a :

$$\int_m^A \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x = \int_m^A \alpha x^{-\alpha} \mathrm{d}x = \left[\alpha \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_m^A = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(m^{1-\alpha} - A^{1-\alpha}\right) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}.$$

Donc :

$$\boxed{\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}.}$$

iv. Comme $Z_1^{(m)} \geqslant 0$, on a

$$0 \leqslant E(Z_1^{(m)}) \leqslant \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}}_{\xrightarrow[m \to +\infty]{} 0}.$$

Donc par encadrement :

$$\boxed{\lim_{m \to +\infty} E(Z_1^{(m)}) = 0.}$$

v. Comme $X_1 = Y_1^{(m)} + Z_1^{(m)}$ par linéarité de l'espérance, on a :

$$\boxed{E(Y_1^{(m)}) = E(X_1) - E(Z_1^{(m)}) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \mu - 0 = \mu.}$$

(c) i. Par définition de $Y_1^{(m)}$, on a $0 \leqslant Y_1^{(m)} \leqslant m$ et $0 \leqslant Y_1^{(m)} \leqslant X_1$. En faisant le produit, on obtient :

$$\boxed{(Y_1^{(m)})^2 \leqslant mX_1.}$$

ii. Comme précédemment, on pose : $g_m : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a alors $Y_1^{(m)} = g_m(X_1)$. D'après le théorème de transfert, sous réserve de convergence absolue, on a :

$$E((Y_1^{(m)})^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} (g_m(i))^2 P(X_1 = i).$$

Or $(g_m(i))^2 \leqslant mi$ d'après la question précédente. Et $\sum_{i=1}^{+\infty} iP(X = i)$ converge absolument car X_1 admet une espérance.

Donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum_{i=1}^{+\infty} (g_m(i))^2 P(X_1 = i)$ converge (et même absolument). Et donc :

$$\boxed{E((Y_1^{(m)})^2) \leqslant m \underbrace{E(X_1)}_{=\mu}.}$$

$Y_1^{(m)}$ admet donc un moment d'ordre 2. $Y_1^{(m)}$ admet donc une variance et d'après la formule de Kœnig-Huygens, on a :

$$\boxed{V(Y_1^{(m)}) = E((Y_1^{(m)})^2) - \underbrace{E(Y_1^{(m)})^2}_{\geqslant 0} \leqslant E((Y_1^{(m)})^2) \leqslant m\mu.}$$

(d) Comme $\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$, on a par définition :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists m_0 \in \mathbb{N}^\star,\ \forall m \geqslant m_0,\ \left| \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} \right| \leqslant \epsilon.$$

On a bien en particulier, à ϵ donné, un m_0 tel que pour $m \geqslant m_0$:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} \leqslant \epsilon.}$$

(e) On a :

$$\boxed{U_k^{(m)} + V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} + \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} (Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k} X_i = T_k.}$$

(f) i. On a prouvé précédemment que $E(Z_1^{(m)}) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$. Comme les $Z_i^{(m)}$ suivent les mêmes lois, les mêmes inégalités s'appliquent.

Par linéarité de l'espérance, on a alors :

$$\boxed{E(V_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k} E(Z_i^{(m)}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha} \leqslant k \times \frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}.}$$

ii. On applique l'inégalité de Markov à la variable $V_k^{(m)}$ qui est bien positive et admet une espérance :

$$\boxed{P(V_k^{(m)} \geqslant k\epsilon) \leqslant \frac{E(V_k^{(m)})}{k\epsilon} \leqslant \frac{k \times \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}}{k\epsilon} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon}.}$$

(g) i. On a $U_k^{(m)} = T_k - V_k^{(m)}$ donc :

$$\boxed{E(U_k^{(m)}) = E(T_k) - E(V_k^{(m)}) \geqslant k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}.}$$

ii. Ainsi :
$$E(U_k^{(m)}) - k\mu \geqslant -k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}.$$
Et comme $m \geqslant m_0$, on a $\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha} \leqslant \epsilon$. Et donc :
$$E(U_k^{(m)}) - k\mu \geqslant -k\epsilon.$$
Puis comme $U_k^{(m)} \leqslant T_k$ (puisque $Y_i^{(m)} \leqslant X_i$), on a :
$$E(U_k^{(m)}) \leqslant \underbrace{E(T_k)}_{k\mu}.$$
et :
$$E(U_k^{(m)}) - k\mu \leqslant 0.$$
Ainsi :
$$-k\epsilon \leqslant E(U_k^{(m)}) - k\mu \leqslant 0 \leqslant k\epsilon.$$
Et donc :
$$\boxed{\left|E(U_k^{(m)}) - k\mu\right| \leqslant k\epsilon.}$$

iii. Montrons que $\left[\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geqslant 2k\epsilon\right] \subset \left[\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| \geqslant k\epsilon\right]$.
L'inégalité triangulaire sur les valeurs absolues nous donne :
$$\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| = \left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)}) + E(U_k^{(m)}) - k\mu\right| \leqslant \left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| + \left|E(U_k^{(m)}) - k\mu\right|$$
Or $\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)} + E(U_k^{(m)} - k\mu\right| \leqslant k\epsilon$. Ainsi :
$$\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \leqslant \left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| + k\epsilon.$$
Donc si $\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geqslant 2k\epsilon$ alors :
$$\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| + k\epsilon \geqslant 2k\epsilon$$
ce qui donne $\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| \geqslant k\epsilon$. Donc, on a bien :
$$\left[\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geqslant 2k\epsilon\right] \subset \left[\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| \geqslant k\epsilon\right]$$
et donc :
$$\boxed{P(\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geqslant 2k\epsilon\right) \leqslant P\left(\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| \geqslant k\epsilon\right).}$$

iv. Comme X_1, X_2, ..., X_k sont mutuellement indépendantes, par lemme des coalitions, les $Y_1^{(m)}$, ..., $Y_k^{(m)}$ sont mutuellement indépendantes. Ainsi :
$$\boxed{V(U_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k} V(Y_i^{(m)}) \leqslant km\mu.}$$

v. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev vue précédemment à la variable $U_k^{(m)}$ qui admet bien une variance d'après la question précédente. On a :
$$P\left(\left|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})\right| \geqslant k\epsilon\right) \leqslant \underbrace{\frac{V(U_k^{(m)})}{(k\epsilon)^2}}_{\leqslant \frac{km\mu}{k^2\epsilon^2} = \frac{m\mu}{k\epsilon^2}}.$$
En combinant avec l'inégalité précédente, on obtient bien :
$$\boxed{P\left(\left|U_k^{(m)} - \mu\right| \geqslant 2k\epsilon\right) \leqslant \frac{m\mu}{k\epsilon^2}.}$$

(h) i. La formule du crible donne :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

que l'on peut réécrire :

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

Or $P(A\cup B)\leqslant 1$. Donc :

$$\boxed{P(A\cap B)\geqslant P(A)+P(B)-1.}$$

ii. Avec les événements donnés A et B, on obtient :

$$P\left(\left[V_k^{(m)}<k\epsilon\right]\cap\left[U_k^{(m)}\in]k(\mu-2\epsilon),k(\mu+2\epsilon)[\right]\right)\geqslant P\left(\left[V_k^{(m)}<k\epsilon\right]\right)+P\left(\left[U_k^{(m)}\in]k(\mu-2\epsilon),k(\mu+2\epsilon)[\right]\right)-1.$$

Or $V_k^{(m)}\geqslant 0$. Donc $V_k^{(m)}<k\epsilon\Leftrightarrow |V_k^{(m)}|<k\epsilon$.
Puis $T_k=V_k^{(m)}+U_k^{(m)}$. Donc, on a l'inégalité triangulaire :

$$|T_k-\mu|=\left|V_k^{(m)}+U_k^{(m)}-\mu\right|\leqslant\left|V_k^{(m)}\right|+\left|U_k^{(m)}-\mu\right|.$$

Donc si $V_k^{(m)}<k\epsilon$ et $U_k^{(m)}\in]k(\mu-2\epsilon),k(\mu+2\epsilon)[$ alors :

$$|T_k-\mu|<\epsilon+2\epsilon=3\epsilon.$$

Donc :

$$\left[V_k^{(m)}<k\epsilon\right]\cap\left[U_k^{(m)}\in]k(\mu-2\epsilon),k(\mu+2\epsilon)[\right]\subset[T_k\in]k(\mu-3\epsilon),k(\mu+3\epsilon)[]$$

et ainsi :

$$P\left(\left[V_k^{(m)}<k\epsilon\right]\cap\left[U_k^{(m)}\in]k(\mu-2\epsilon),k(\mu+2\epsilon)[\right]\right)\leqslant P\left(T_k\in]k(\mu-3\epsilon),k(\mu+3\epsilon)[\right).$$

Et donc finalement :

$$\boxed{P\left(T_k\in]k(\mu-3\epsilon),k(\mu+3\epsilon)[\right)\geqslant P\left(V_k^{(m)}<k\epsilon\right)+P\left(U_k^{(m)}\in]k(\mu-2\epsilon),k(\mu+2\epsilon)[\right)-1.}$$

iii. On a $P\left(V_k^{(m)}<k\epsilon\right)=1-P\left(V_k^{(m)}\geqslant k\epsilon\right)\geqslant 1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon}$.
De manière similaire, on a :

$$P\left(U_k^{(m)}\in]k(\mu-2\epsilon),k(\mu+2\epsilon)[\right)=1-P\left(\left|U_k^{(m)}-k\mu\right|\geqslant 2\epsilon\right)\geqslant 1-\frac{m\mu}{k\epsilon^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{P\left(T_k\in]k(\mu-3\epsilon),k(\mu+3\epsilon)[\right)\geqslant 1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon}+1-\frac{m\mu}{k\epsilon^2}-1\geqslant 1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon}-\frac{m\mu}{k\epsilon^2}.}$$

iv. On fixe $\epsilon>0$. On prend $k\geqslant m_0^2$. Comme $m_0\geqslant 1$, on a :

$$2\sqrt{k}-\sqrt{k}=\sqrt{k}\geqslant\sqrt{m_0^2}\geqslant 1$$

et donc il existe des entiers dans $[\sqrt{k},2\sqrt{k}]$. Soit m_k entier dans cet intervalle. On a donc $m_k\geqslant m_0$.
Ainsi :

$$P\left(T_k\in]k(\mu-3\epsilon),k(\mu+3\epsilon)[\right)\geqslant 1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m_k^{1-\alpha}}{\epsilon}-\frac{m_k\mu}{k\epsilon^2}.$$

Or par décroissance de $x\mapsto x^{1-\alpha}$ (car $\alpha>1$), on a :

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m_k^{1-\alpha}}{\epsilon}\leqslant\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{\sqrt{k}^{1-\alpha}}{\epsilon}.$$

On a également :

$$\frac{m_k\mu}{k\epsilon^2} \leqslant \frac{2\sqrt{k}\mu}{k\epsilon^2}.$$

Donc :

$$1 \geqslant P\left(T_k \in]k(\mu-3\epsilon), k(\mu+3\epsilon)[\right) \geqslant 1 - \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{k^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\epsilon}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0} - \underbrace{\frac{2\mu}{\sqrt{k}\epsilon^2}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0}.$$

Et donc par encadrement :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu-3\epsilon, \mu+3\epsilon[\right) = 1.}$$