Devoir Surveillé n°2 - Mercredi 9 novembre 2022

Prière de respecter une **marge** suffisante, d'**encadrer** vos résultats,
et de **changer de copie** à chaque nouvel exercice,
en faisant apparaître **votre nom** et un numéro sur **chaque** copie.

Exercice 1

On admet que si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les deux conditions $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}.$$

1. **a.** Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n < 1.$

   b. Étudier les variations de la suite (u_n).

   c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

2. Pour tout entier naturel n, on note $v_n = 1 - u_n$.

   a. Montrer que $\quad \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$

   b. Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers l'infini.

   c. En déduire que $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$

   Les questions suivantes seront traitées à l'aide du langage de programmation Python.

3. **a.** Écrire une fonction d'en-tête `def u(n):` qui prenne en argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

   b. Quelle instruction faut-il ensuite exécuter dans la console pour obtenir la valeur de u_{12} ?

4. Écrire un programme permettant de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on ait $1 - u_n < 10^{-3}$.

Exercice 2

Modélisation de l'offre et de la demande :
On note $p(t)$ le prix d'un bien à l'instant t. Ce prix évolue en fonction de l'offre $f(t)$ et de la demande $g(t)$. On suppose que f et g sont affines par rapport au prix :

$$f(t) = -a + bp(t) \qquad\qquad g(t) = c - dp(t)$$

où a, b, c et d sont des constantes strictement positives, et que la variation de prix par unité de temps est proportionnelle à l'écart entre l'offre et la demande. Autrement dit, il existe $k \neq 0$, tel que $p'(t) = k(f(t) - g(t))$
On note p_0 le prix à l'instant $t = 0$.

1. Montrer que p vérifie une équation différentielle (E) que l'on précisera.
2. Vérifier que (E) admet une une solution constante. Résoudre (E).
3. Montrer que $p(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$ indépendante du prix initial si $k > 0$.

Exercice 3

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels, I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : AM = M\} \quad \text{et} \quad E_2(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : A^2M = AM\}.$$

PARTIE I.

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. **a.** Montrer que $E_1(A) \subset E_2(A)$.

b. Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.

3. Montrer que si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.

4. Un exemple : soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

PARTIE II.

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. **a.** En effectuant des opérations de Gauss à partir de $C - \lambda I$, obtenir une matrice triangulaire supérieure permettant de trouver pour quels réels λ la matrice $C - \lambda I$ n'est pas inversible.

b. Résoudre $CX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble F des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.

c. Résoudre $CX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble G des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.

d. Résoudre $CX = 2X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble H des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.

e. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Déterminer $D = P^{-1}CP$.

f. Compléter le programme python en utilisant la commande `np.ones` afin d'obtenir la matrice P :

```
P=................
P[1,2]=.........
P[.,.]=0
```

6. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.

a. Montrer que $M \in E_1(C) \Leftrightarrow N \in E_1(D)$.

b. Pour cette question, on admettra que D est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(0,1,2)$.
Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b et c tels que l'on ait $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. En déduire une expression générale des éléments de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.

Exercice 4

Soit a un entier strictement positif.
On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

I. Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathrm{E}(X)$ son espérance.
Enfin on note R_k l'événement « Avoir un roi rouge au k-ième tirage. »

1. Donner le support de X et montrer que l'événement $(X = k)$ vérifie : $(X = k) = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$.
2. Montrer : $\forall k \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, $\mathrm{P}(X = k) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$.
(Indication : on remarquera que $(2n)! = (2n)(2n-1)\ldots(2n-k+1) \times (2n-k)!$)
3. Montrer : $\mathrm{E}(X) = \frac{2n+1}{3}$.
(On rappelle que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.)
4. Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   - **a.** Exprimer G_1 en fonction de X et de a.
   - **b.** Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

II. Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.
Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer $\mathrm{P}(G_2 = a - k)$.
2. Vérifier : $\mathrm{P}(G_2 = -n) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.
3. Montrer : $\mathrm{E}(G_2) = \frac{3(3n-1)a-(7n^2-1)}{6(2n-1)}$.

III. Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).
Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Exercice 5

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. **a.** Montrer que f_n est continue à droite en 0.

b. Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.

2. **a.** Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.

b. Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variation de f_n.

3. **a.** Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.

b. En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

c. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, la courbe C_n admet une asymptote oblique[1] D_n dont on donnera une équation. Préciser la position relative de D_n et C_n aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

d. Donner l'allure de la courbe C_1.

4. **a.** Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.

b. Vérifier que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation $x \ln x = n$.

c. Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x \ln x$.
En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

d. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$, puis montrer que $\ln u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$.
En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

b. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_{n+1}) = \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$.

6. On note $I_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$.

b. En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

c. Montrer alors que la série de terme général I_n est divergente.

---

1. Cette notion est désormais hors-programme, mais la question reste cependant traitable.