Corrigé du Devoir Surveillé n°2

Exercice 1 (d'après EDHEC 2012)

1. **a.** Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$ (HR_n).
Initialisation : Comme $u_0 = 0 \in [0,1[$, HR_0 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_n vérifiée.
Alors, comme $0 \leq u_n < 1$, et puisque la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc sur $[0,1[$, comme somme de deux fonctions strictement croissantes, $f(0) \leq f(u_n) < f(1)$ et donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1[$. HR_{n+1} est donc vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2-2u_n+1}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0$, donc (u_n) est croissante.
Ce résultat aurait aussi pu être montré par récurrence, voire être intégré à la récurrence de la question précédente.

c. (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \leq 1$.
De plus, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1[$, on a $\ell \in [0,1]$.
Enfin, comme $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n^2+1}{2}$, on a, en appliquant le théorème du point fixe et **du fait de la continuité** de la fonction polynomiale f : $f(\ell) = \ell \iff \ell = \frac{\ell^2+1}{2} \iff \frac{(\ell-1)^2}{2} = 0 \iff \ell = 1$.
D'où $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1.}$

2. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} \\
&= \frac{1}{\frac{2-u_n^2-1}{2}} - \frac{1}{1-u_n} \\
&= \frac{2}{1-u_n^2} - \frac{1}{1-u_n} \\
&= \frac{2}{(1-u_n)(1+u_n)} - \frac{1+u_n}{(1-u_n)(1+u_n)} \\
&= \frac{1-u_n}{(1-u_n)(1+u_n)} \\
&= \frac{1}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b. D'après le résultat admis en début d'exercice,
$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2.$$

Or par télescopage
$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}\right) = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_n} - 1.$$

Par suite,
$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_n} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2 &\iff \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_n} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/2 \\
&\iff \frac{1}{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2} \\
&\iff \frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2} \qquad (\text{car } 1 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\tfrac{n}{2}\right)) \\
&\iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

c. Par suite, $v_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right)$, donc $1 - u_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, et enfin $\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$

3. **a.** On doit calculer de u_0 à u_n d'où la boucle `for i in range(1,n+1)`

```
def u(n):
        u=0
        for i in range(1,n+1):
                u=(u**2+1)/2
        return u
```

b. `u(12)`

4. Réutiliser la fonction précédente serait maladroit car cela conduirait à recalculer la même chose plusieurs fois ; il est plus efficace de repartir de zéro :

```
n = 0
u = 0
while 1-u>=10**(-3):
        n=n+1
        u=(u**2+1)/2
print(n)
```

Exercice 2

1. On a $p'(t) + k(d+b)p(t) = k(c+a)$ C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1.
2. Le second membre $k(c+a)$ est également constant. Il existe donc une trajectoire d'équilibre, c'est à dire une solution particulière constante : la fonction constante égale à $\frac{c+a}{d+b}$
   L'équation homogène ayant pour solution les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{-k(d+b)t}$, $C \in \mathbb{R}$
   Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que , pour $t \geq 0$, $p(t) = \frac{c+a}{d+b} + Ce^{-k(d+b)t}$
   Avec $C = p_0 - \frac{c+a}{d+b}$ en tenant compte de la condition initiale $p(0) = p_0$.
   D'où, pour tout $t > 0$, $p(t) = \frac{c+a}{d+b} + \left(p_0 - \frac{c+a}{d+b}\right) e^{-k(d+b)t}$
3. D'après l'expression de $p(t)$, si $k > 0$, et puisque les réels b et d sont strictement positifs, $\lim_{t \to +\infty} p(t) = \frac{c+a}{d+b}$, et est donc indépendant de p_0, le prix initial.

Exercice 3 (d'après EML 2004)

PARTIE I.

1.
- $E_1(A)$ est par construction un sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- Comme $A\cdot 0 = 0$, l'ensemble $E_1(A)$ contient 0.
- Soient M et N dans $E_1(A)$ et soient λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors, comme

$$A(\lambda M + \mu N) = \lambda(AM) + \mu(AN) = \lambda M + \mu N,$$

la matrice $\lambda M + \mu N$ appartient elle aussi à $E_1(A)$, qui est donc stable par combinaisons linéaires.

Par suite, $E_1(A)$ est bien un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

2. **a.** Soit $M \in E_1(A)$, alors on a $AM = M$, donc $A^2M = A(AM) = A(M) = AM$, donc $M \in E_2(A)$.
Donc $E_1(A) \subset E_2(A)$.

b. D'après la question précédente, il suffit de montrer que, si A est inversible, alors $E_2(A) \subset E_1(A)$.
Or, dans ce cas, soit $M \in E_2(A)$, alors $A^2M = AM$, et donc, en multipliant à gauche par A^{-1}, on en déduit que $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$ et donc $AM = M$, donc $M \in E_1(A)$ ce qui conclut.

3. Si $A - I$ est inversible, alors

$$\begin{aligned} M \in E_1(A) &\Leftrightarrow AM = M \\ &\Leftrightarrow AM - M = 0 \\ &\Leftrightarrow (A-I)M = 0 \\ &\Leftrightarrow (A-I)^{-1}(A-I)M = 0 \\ &\Leftrightarrow M = 0. \end{aligned}$$

On obtient donc dans ce cas, $E_1(A) = \{0\}$.

4. Comme $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B - I$ est inversible (matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls), donc $E_1(B) = \{0\}$ d'après **3.a.**. De plus, B est inversible (triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls), donc, d'après **2.b.**, $\boxed{E_2(B) = E_1(B) = \{0\}.}$

PARTIE II.

5. **a.** Soit λ un réel. On écrit $C - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$

En échangeant L_1 et L_2, il vient : $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$

Puis avec les opérations : $(L_2 \leftarrow L_2 - (3-\lambda)L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)$, $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda^2+3\lambda-2 & 2-\lambda \\ 0 & 2(\lambda-1) & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & (\lambda-1)(2-\lambda) & 2-\lambda \\ 0 & 2(\lambda-1) & 2-\lambda \end{pmatrix}$

Puis finalement avec l'opération $(L_3 \leftarrow (2-\lambda)L_3 - 2L_2)$: $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & (\lambda-1)(2-\lambda) & 2-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(2-\lambda) \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Les valeurs pour lesquelles } C - \lambda I \text{ n'est pas inversible sont donc 0, 1 et 2}}$, puisque pour ces valeurs, cette matrice est triangulaire supérieure avec un (ou deux) élément(s) diagonal(ux) nul(s). Pour les autres valeurs de λ, la matrice est triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux non nuls, et elle est donc inversible.

b. Pour $\lambda = 0$,

$$CX = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x & -z & & = 0 \\ & 2z & -2y & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = z.$$

D'où $\boxed{F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{ espace vectoriel de dimension 1 car engendré par un vecteur non nul, qui est sa base.}}$

c. Pour $\lambda = 1$,

$$CX = X \Leftrightarrow (C-I)X = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} x & -z & -y & =0 \\ & z & & =0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=y \\ z=0 \end{array} \right.$$

D'où $\boxed{G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$, espace vectoriel de dimension 1 car engendré par un vecteur non nul, qui est sa base.

d. Pour $\lambda = 2$,

$$CX = 2X \Leftrightarrow (C-2I)X = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} x & -z & -2y & =0 \\ & 2z & & =0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=z \\ y=0 \end{array} \right.$$

D'où $\boxed{H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$, espace vectoriel de dimension 1 car engendré par un vecteur non nul, qui est sa base.

e. En posant $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},}$ et en calculant P^{-1} à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan et on trouve $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$ et

$$\boxed{P^{-1}CP = D = \text{diag}(0,1,2).}$$

f.
```
P=np.ones((3,3))        # ne pas oublier les doubles parenthèses
P[1,2]=0                # on remplace le coefficient en 2eme ligne et 3me colonne par un 0
P[2,1]=0                # on remplace le coefficient en 3eme ligne et 2me colonne par un 0
```

6. **a.** En appliquant les définitions de la partie I., $N \in E_1(D) \Leftrightarrow DN = N$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow P^{-1}CPN = N \\ &\Leftrightarrow P^{-1}CPP^{-1}M = P^{-1}M \\ &\Leftrightarrow P^{-1}CM = P^{-1}M \\ &\Leftrightarrow PP^{-1}CM = PP^{-1}M \\ &\Leftrightarrow CM = M \\ &\Leftrightarrow M \in E_1(C). \end{aligned}$$

b. Soit $N = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_4 & n_5 & n_6 \\ n_7 & n_8 & n_9 \end{pmatrix}$ une matrice quelconque.

$$N \in E_1(D) \quad \Leftrightarrow \quad DN = N \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 = n_2 = n_3 = 0 \\ n_4 = n_4 \quad n_5 = n_5 \quad n_6 = n_6 \\ 2n_7 = n_7 \quad 2n_8 = n_8 \quad 2n_9 = n_9, \end{array} \right.$$

d'où l'existence de trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $E_1(C) = \{PN, N \in E_1(D)\} = \left\{ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \boxed{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}$

où cette famille est clairement libre (matrices à supports disjoints), c'est donc une base de $E_1(C)$ qui est donc de $\boxed{\text{dimension 3.}}$

Exercice 4 (d'après EML 2000)

I. Premier protocole

1. $X(\Omega) = [\![1, 2n-1]\!]$, car, comme il y a deux rois rouges dans le jeu, on aura le premier au pire à l'avant dernier tirage. Pour tout $k \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, $(X = k)$ signifie que le premier roi rouge apparaît au k-ième tirage, et que tous les tirages antérieurs n'ont pas été des rois rouges. Cela arrive au plus tard au $2n-1$-ième tirage car il ne reste alors que les deux rois rouges.
D'où $(X = k) = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$.

2. Alors d'après la formule des probabilités composées, avec $p(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}) \neq 0$:

$$\begin{aligned} p(X = k) &= p(\overline{R_1}) \cdot p_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \ldots p_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k) \\ &= \frac{2n-2}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdots \frac{2n-2-(k-2)}{2n-(k-2)} \cdot \frac{2}{2n-(k-1)} \end{aligned}$$

Car par exemple, quand on a tiré déjà $\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-2}}$, il reste $2n-2-(k-2)$ cartes qui ne sont pas des rois rouges parmi $2n-(k-2)$ cartes équiprobables.
Or $(2n-2)(2n-3)\ldots(2n-k) = (2n-2)!/(2n-k-1)!$ et $(2n)(2n-1)\ldots(2n-k+1) = (2n)!/(2n-k)!$ donc :
$p(X = k) = \dfrac{2(2n-2)!(2n-k)!}{(2n-k-1)!(2n)!} = \dfrac{2(2n-k)}{2n(2n-1)} = \boxed{\dfrac{2n-k}{n(2n-1)}}$

3. Comme $X(\Omega)$ est fini, X admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} k\mathsf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{2n-1} k \tfrac{2n-k}{n(2n-1)} \\ &= \frac{2n}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k - \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \\ &= \frac{2n}{n(2n-1)} \frac{(2n-1)2n}{2} - \frac{1}{n(2n-1)} \frac{(2n-1)2n(2(2n-1)+1)}{6} \\ &= 2n - \frac{4n-1}{3} = \boxed{\frac{2n+1}{3}} \end{aligned}$$

4. a. D'après les conditions de l'énoncé, on a $\boxed{G_1 = a - X}$, car le joueur gagne a euro lors de la découverte du roi rouge, mais a perdu 1 euro à chaque tirage, soit X euros.
   b. Par suite, comme X admet une espérance, $G_1 = a - X$ en admet une aussi et

$$\mathsf{E}(G_1) = a - \mathsf{E}(X) = a - \tfrac{2n+1}{3} = \boxed{\tfrac{3a-2n-1}{3}.}$$

II. Deuxième protocole

1. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathsf{P}(G_2 = a - k) = \mathsf{P}(X = k) = \boxed{\tfrac{2n-k}{n(2n-1)}}$.

2. $(G_2 = -n)$ signifie que l'on n'a toujours pas tiré de roi rouge à l'issue des n premiers tirages.
Donc $(G_2 = -n) = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_n}$ et d'après la formule des probabilités composées avec $p(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{n-1}} \neq 0$:

$$\begin{aligned} p(G_2 = -n) &= p(\overline{R_1}) \cdot p_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \ldots p_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n}) \\ &= \frac{2n-2}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdots \frac{2n-2-(n-1)}{2n-(n-1)} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-2)!} \cdot \frac{n!}{((2n)!} = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \boxed{\frac{n-1}{2(2n-1)}} \end{aligned}$$

3. Comme $G_2(\Omega) = \{-n\} \cup \{a-k,\ k \in [\![1,n]\!]\}$ est fini, G_2 admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(G_2) &= -n\mathrm{P}(G_2 = -n) + \sum_{k=1}^{n} (a-k)\mathrm{P}(G_2 = a-k) \\
&= -n\tfrac{n-1}{2(2n-1)} + \sum_{k=1}^{n} (a-k)\tfrac{2n-k}{n(2n-1)} \\
&= -n\tfrac{n-1}{2(2n-1)} + \tfrac{2na}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{n} 1 - \tfrac{2n+a}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{n} k + \tfrac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \tfrac{n-n^2}{2(2n-1)} + \tfrac{2na}{n(2n-1)} n - \tfrac{2n+a}{n(2n-1)} \tfrac{n(n+1)}{2} + \tfrac{1}{n(2n-1)} \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \tfrac{n-n^2}{2(2n-1)} + \tfrac{2na}{(2n-1)} - \tfrac{(2n+a)(n+1)}{2(2n-1)} + \tfrac{(n+1)(2n+1)}{6(2n-1)} \\
&= \tfrac{3n-3n^2+12na-6n^2-3na-6n-3a+2n^2+3n+1}{6(2n-1)} = \tfrac{-7n^2+1-3a+9na}{6(2n-1)} = \boxed{\tfrac{3(3n-1)a-(7n^2-1)}{6(2n-1)}}
\end{aligned}$$

III. Comparaison des deux protocoles

Le protocole 1 est plus favorable que le protocole 2 si et seulement si $\mathrm{E}(G_1) - \mathrm{E}(G_2) \geq 0$. Étudions le signe de $\mathrm{E}(G_1) - \mathrm{E}(G_2)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(G_1) - \mathrm{E}(G_2) &= \tfrac{3a-2n-1}{3} - \tfrac{3(3n-1)a-(7n^2-1)}{6(2n-1)} \\
&= \tfrac{3(4n-2)a-(8n^2-2)}{6(2n-1)} - \tfrac{3(3n-1)a-(7n^2-1)}{6(2n-1)} \\
&= \tfrac{3(4n-2)a-(8n^2-2)-3(3n-1)a-(7n^2-1)}{6(2n-1)}
\end{aligned}$$

Pour $n = 16$, $\mathrm{E}(G_1) - \mathrm{E}(G_2) = -\frac{15}{62}a + \frac{85}{62}$. Le protocole 1 est le plus favorable si et seulement si $\boxed{a \geq 17/3.}$

Exercice 5 (EDHEC 2004)

pb n désigne un entier naturel non nul. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=\begin{cases} x e^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. **a.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)=0=f_n(0)$, donc f_n est continue à droite en 0.

b. Pour tout $x>0$, $\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x}=e^{-n/x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0$, donc f_n est dérivable à droite en 0 et $\boxed{f_n'(0^+)=0.}$

2. **a.** f_n est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ par opération sur les fonctions usuelles et,

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f_n'(x)=e^{-n/x}+x.\frac{n}{x^2}e^{-n/x}=\boxed{\left(1+\frac{n}{x}\right)e^{-n/x}}$$

Par suite, $f_n'(x)>0\Leftrightarrow 1+\frac{n}{x}>0\Leftrightarrow\frac{n+x}{x}>0$, ce qui permet de conclure à l'aide d'un tableau de signes :

b.

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$x+n$		-	0	+	|	+	
x		-	|	-	0	+	
$f_n'(x)$		+	0	-	‖0	+	
$f_n(x)$			$-ne$		‖		$+\infty$
		↗		↘	‖	↗	
	$-\infty$				$-\infty$‖0		

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\underbrace{e^{-n/x}}_{\to 1}=-\infty$

$f_n(-n)=-ne$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f_n(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{-n/x}=-\infty$ (par croissances comparées et étude du signe)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\underbrace{e^{-n/x}}_{\to 1}=+\infty$

3. **a.** On a $\boxed{e^u\underset{u\to 0}{=}1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)}$.

b. Posons $X=1/x$. Alors $X\to 0$ lorsque x est au voisinage de $\pm\infty$ (ainsi que nX) et

$$\begin{aligned} f_n(1/X)=\frac{1}{X}e^{-nX} &\underset{X\to 0}{=}\frac{1}{X}\left(1-nX+\frac{(-nX)^2}{2}+o(X^2)\right)\\ &\underset{X\to 0}{=}\frac{1}{X}-n+\frac{n^2X}{2}+o(X)\end{aligned}$$

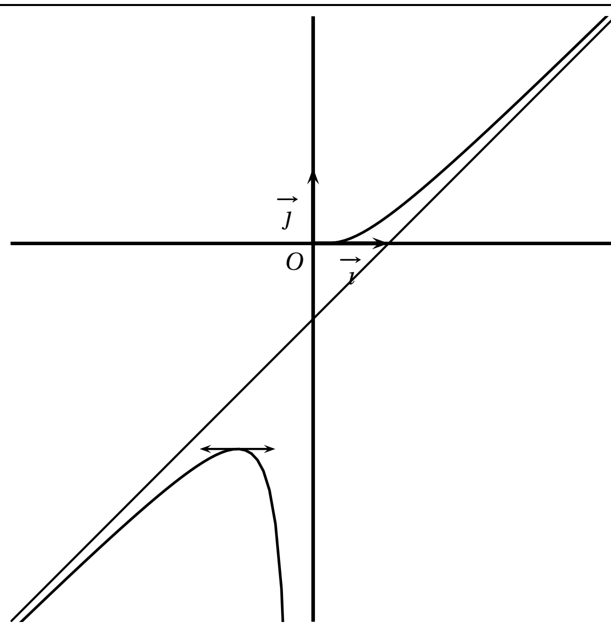
d'où $\boxed{f_n(x)\underset{x\to\infty}{=}x-n+\frac{n^2}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}$

c. D'après le développement asymptotique de f_n obtenu en 3b, (C_n) admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique (D_n) d'équation $\boxed{y=x-n}$.

Pour étudier la position relative, il suffit de déterminer le signe de $\frac{n^2}{2x}$.

D'où $\boxed{(C_n) \text{ est au-dessus de } (D_n) \text{ au voisinage de } +\infty \text{ et au-dessous de } (D_n) \text{ au voisinage de } -\infty.}$

d.



4. **a.** D'après le tableau de variations de f_n, l'équation $f_n(x)=1$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}^-$.
De plus, comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,+\infty[$.
Par suite, comme $1\in[0,+\infty[$, l'équation $f_n(x)=1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n.
On a bien montré l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $f_n(u_n)=1$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Comme $f_n(1)=e^{-n}<1$, d'après le tableau de variations de f_n, on a $u_n>1$.
De plus,

$$\begin{aligned} f_n(u_n)=1 &\Leftrightarrow u_n e^{-n/u_n}=1\\ &\Leftrightarrow e^{-n/u_n}=1/u_n\\ &\Leftrightarrow -n/u_n=\ln(1/u_n)\\ &\Leftrightarrow n/u_n=\ln(u_n)\\ &\Leftrightarrow n=u_n\ln(u_n).\end{aligned}$$

u_n est donc bien solution de l'équation $x\ln(x)=n$.

c. g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ comme produit de fonctions croissantes et positives.
On a $g(1)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
Par suite, comme g est continue (par opérations sur les fonctions usuelles) et strictement croissante sur $[1,+\infty[$, elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$. Notons g^{-1} sa bijection réciproque.
Alors, comme $g(u_n)=n$ et $u_n\in[1,+\infty[$, on a $u_n=g^{-1}(n)$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}g^{-1}(n)=+\infty$.

d. • Comme $u_n\ln(u_n)=n$, on a $\ln\big(u_n\ln(u_n)\big)=\ln n$, ie $\ln u_n+\ln\big(\ln u_n\big)=\ln n$.
• Comme $\lim u_n=+\infty$, on a $\lim\ln(u_n)=+\infty$ et donc, comme $\ln(x)=\underset{+\infty}{o}(x)$,
on a $\ln\big(\ln(u_n)\big)=\underset{+\infty}{o}\big(\ln(u_n)\big)$.
Par suite, comme $\ln n=\ln u_n+o(\ln(u_n))$, on a $\boxed{\ln u_n\underset{+\infty}{\sim}\ln n}$.
• Enfin, comme $u_n\ln(u_n)=n$, on a (car $\ln(u_n)\neq 0$) :

$$u_n=\frac{n}{\ln(u_n)}\boxed{\underset{+\infty}{\sim}\frac{n}{\ln n}}$$

5. **a.** **1ère méthode :** On a $n\le n+1$, donc, comme g^{-1} est croissante,
on a $u_n=g^{-1}(n)\le g^{-1}(n+1)=u_{n+1}$, (u_n) est donc croissante.
2ème méthode : On a $f_{n+1}(u_n)=u_ne^{-(n+1)/u_n}=u_ne^{-n/u_n}e^{-1/u_n}=e^{-1/u_n}<1$,
donc, d'après le tableau de variations de f_{n+1}, on a $u_{n+1}\ge u_n$, ie (u_n) est croissante.

b. $f_n(u_{n+1})=u_{n+1}e^{-n/u_{n+1}}=u_{n+1}e^{-(n+1)/u_{n+1}}e^{1/u_{n+1}}=e^{1/u_{n+1}}$.

6. **a.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Comme f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $[u_n,u_{n+1}]$, on a :

$$\forall t\in[u_n,u_{n+1}],\qquad 1=f_n(u_n)\le f_n(t)\le f_n(u_{n+1})=e^{1/u_{n+1}}.$$

D'où, par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens car (u_n) est croissante), on a :

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}}1\,dt\le\int_{u_n}^{u_{n+1}}f(t)\,\mathrm{d}t\le\int_{u_n}^{u_{n+1}}e^{1/u_{n+1}}\,\mathrm{d}t,$$

donc

$$u_{n+1}-u_n\le I_n\le e^{1/u_{n+1}}(u_{n+1}-u_n),$$

et, en divisant par $u_{n+1}-u_n>0$, on a

$$1\le\frac{I_n}{u_{n+1}-u_n}\le e^{1/u_{n+1}}.$$

b. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{1/u_{n+1}}=1$ (car $u_n\to+\infty$), d'après le théorème des gendarmes, $\lim\frac{I_n}{u_{n+1}-u_n}=1$, et donc $I_n\underset{+\infty}{\sim}u_{n+1}-u_n$.

c. • La série (I_n) est une série à termes positifs (intégrale d'une fonction positive et bornes dans le bon sens).
La série $(u_{n+1}-u_n)$ est une série à termes positifs (car la suite (u_n) est croissante).
• Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n}u_{k+1}-u_k=u_{n+1}-u_1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, donc la série $(u_{n+1}-u_n)$ diverge.
• D'où, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série (I_n) diverge aussi.