# **Devoir Surveillé n°2** - Indications

## Exercice 1

On admet que si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\ell$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell. \quad (\star)$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les deux conditions $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}\cdot \quad (\star\star)$$

1. **a.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le u_n < 1$.
   par récurrence (il est conseillé de faire au préalable l'étude rapide de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$)

   **b.** Étudier les variations de la suite $(u_n)$
   par récurrence (en se servant de la fonction $f$ introduite dans la question précédente)
   OU en cherchant le signe de $u_{n+1} - u_n$ (dans ce cas, on reconnaîtra une identité remarquable plutôt que de faire une recherche de discriminant, ce qui serait considéré comme maladroit)

   **c.** Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)$ converge et donner sa limite.
   On commence par utiliser le théorème de la limite monotone puis on enchaîne avec le théorème du point fixe correctement rédigé (on pensera à mentionner **l'indispensable** hypothèse de continuité de la fonction $f$ introduite en question a.)

2. Pour tout entier naturel $n$, on note $v_n = 1 - u_n$.

   **a.** Montrer que $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\cdot$
   Calculer $v_{n+1} - v_n$ en utilisant la définition de $v_n$ (et donc de $v_{n+1}$, puis utiliser la relation $(\star\star)$, puis utiliser le calcul fractionnaire jusqu'à obtenir $\frac{1}{1+u_n}$ et conclure quand à la limite.

   **b.** Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de $v_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.
   on utilise la relation $(\star)$ en remplaçant $a_j$ par $\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}$ puis on applique le principe de télescopage, puis on travaille sur des équivalents

   **c.** En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\cdot$
   On utilise la définition des équivalents (critère de la différence) pour trouver devant quoi $v_n - \frac{2}{n}$ est négligeable, puis on conclut en revenant à $u_n$.

   Les questions suivantes seront traitées à l'aide du langage de programmation Python.

3. **a.** Écrire une fonction d'en-tête `def u(n):` qui prenne en argument un entier $n$ et qui renvoie la valeur de $u_n$.

   **b.** Quelle instruction faut-il ensuite exécuter dans la console pour obtenir la valeur de $u_{12}$ ?

4. Écrire un programme permettant de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de $n$ pour laquelle on ait $1 - u_n < 10^{-3}$.

## Exercice 2

Modélisation de l'offre et de la demande :
On note $p(t)$ le prix d'un bien à l'instant $t$. Ce prix évolue en fonction de l'offre $f(t)$ et de la demande $g(t)$. On suppose que $f$ et $g$ sont affines par rapport au prix :

$$f(t) = -a + bp(t) \qquad\qquad g(t) = c - dp(t)$$

où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des constantes strictement positives, et que la variation de prix par unité de temps est proportionnelle à l'écart entre l'offre et la demande. Autrement dit, il existe $k \neq 0$, tel que $p'(t) = -k(f(t) - g(t)) \quad (\star)$
On note $p_0$ le prix à l'instant $t = 0$.

1. Montrer que $p$ vérifie une équation différentielle $(E)$ que l'on précisera.
   Transformer $(\star)$ en remplacant $f(t)$ et $g(t)$ par leurs expressions, puis en factorisant ce qui peut l'être par $p(t)$. Mettre tout ce qui ne dépend ni de $p'(t)$ ni de $p(t)$ dans le membre de droite.
2. Vérifier que $(E)$ admet une une solution constante. Résoudre $(E)$.
   On applique le cours des équa diff.
3. Montrer que $p(t)$ admet une limite finie lorsque $t$ tend vers $+\infty$ indépendante du prix initial si $k > 0$.

## Exercice 3

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels, $I$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et $0$ la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice $A$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : AM = M\} \qquad \text{et} \qquad E_2(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : A^2M = AM\}.$$

### PARTIE I.

**1.** Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Démonstration en 3 points. Les deux premiers (dire que l'espace étudié est dans un ev de référence plus grand, et dire que l'ev étudié est non vide car contenant 0 est facile
Pour le troisième point, on considère deux éléments de $E_1(A)$, que l'on appelera par exemple $M_1$ et $M_2$ et on montre qu'une combinaison linéaire de ces deux éléments appartient aussi à $E_1(A)$.

**2.** **a.** Montrer que $E_1(A) \subset E_2(A)$.
on montre que si une matrice quelconque $M$ appartient à $E_1(A)$ alors elle appartient également à $E_2(A)$.

**b.** Montrer que si $A$ est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.
Puisqu'on a déjà montré une inclusion dans la question précédente, on montre l'autre : on montre que si une matrice quelconque $M$ appartient à $E_2(A)$ alors elle appartient également à $E_2(A)$. Pour cela, il faudra dans le raisonnement multiplier à gauche par $A^-1$

**3.** Montrer que si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.
On traduit le fait que $M \in E_1(A)$, on manipule l'équation pour "mettre tout dans le membre de gauche" et on multiplie à gauche par $(A-I)^{-1}$.

**4.** Un exemple : soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.
après avoir remarqué que $B$ est inversible (sa forme particulère rend cette étude évidente), on applique le résultat des questions précédentes sans faire aucun calcul.

### PARTIE II.

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

**5.** **a.** En effectuant des opérations de Gauss à partir de $C - \lambda I$, obtenir une matrice triangulaire supérieure permettant de trouver pour quels réels $\lambda$ la matrice $C - \lambda I$ n'est pas inversible.
On fait attention à ne pas choisir un pivot dans lequel figure l'inconnu (et qui est donc potentiellement nul)

**b.** Résoudre $CX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $F$ des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
On résout un le système de trois équations à trois inconnues qui découle de l'équation matricielle, on exprime l'ensemble des solutions sous la forme d'un vect. On parle de la liberté de la famille mise en évidence dans le Vect pour conclure qu'il s'agit d'une base de $F$ et en comptant le nombre de vecteurs de cette famille, on en déduit la dimension du sev $F$.

**c.** Résoudre $CX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $G$ des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
idem

**d.** Résoudre $CX = 2X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $H$ des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
idem

**e.** En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Déterminer $D = P^{-1}CP$.
Méthode de Gauss-Jordan pour calculer $P^{-1}$ puis calcul de $P^{-1}C$ puis calcul de $P^{-1}CP$

**f.** Compléter le programme python en utilisant la commande `np.ones` afin d'obtenir la matrice P :

```
P=................
P[1,2]=.........
P[.,.]=0
```

On se souvient de la syntaxe de np.ones et on se souvient que Python commence la numérotation des lignes et des colonnes à 0.

**6.** Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.

**a.** Montrer que $M \in E_1(C) \Leftrightarrow N \in E_1(D)$.
On raisonne par équivalences tout du long : Traduire l'appartenance de $M$ à $E_1(C)$ par une égalité vectorielle, puis transformer cette égalité vectorielle en se servant des résultats des questions précédentes, jusqu'à arriver à la traduction par une égalité vectorielle de l'appartenance de $N$ à $E_1(D)$

**b.** Pour cette question, on admettra que $D$ est la matrice diagonale $\text{diag}(0,1,2)$.
Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que l'on ait $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On comment par prendre une matrice $N$ d'ordre 3 quelconque en donnant des noms à ses 9 coefficients, puis on trouve 9 conditions en exprimant le fait que $DN = N$.

**7.** En déduire une expression générale des éléments de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
On calcule $PN$ avec la forme de $N$ trouvé dans la question précédente et on exprimer $E_1(C)$ sous la forme d'un Vect pour répondre aux questions.

# Exercice 4

Soit $a$ un entier strictement positif.
On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou $26$) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

## I. PREMIER PROTOCOLE

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge.
On note $X$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathrm{E}(X)$ son espérance.
Enfin on note $R_k$ l'événement « Avoir un roi rouge au $k$-ième tirage. »

1. Donner le support de $X$ et montrer que l'événement $(X=k)$ vérifie : $(X=k) = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$.
   Dire dans quel intervalle $X$ peut prendre ses valeurs et décrire simplement l'expérience découverte de carte après découverte.
2. Montrer : $\forall k \in \{1, \ldots, 2n-1\},\ \mathrm{P}(X=k) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$.
   (Indication : on remarquera que $(2n)! = (2n)(2n-1)\ldots(2n-k+1) \times (2n-k)!$)
   On utilise la formule des probabilités composées pour obtenir le produit de $k$ fractions puis on utilise l'indication pour exprimer $2n(2n-1)\ldots(2n-k+1)$ en fonction de factorielles et aussi $(2n-2)(2n-3)\ldots(2n-k)$ en fonction de factorielles.
   On finit en simplifiant les factorielles qui peuvent l'être.
3. Montrer : $\mathrm{E}(X) = \frac{2n+1}{3}$.
   (On rappelle que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.)
   On utilise la formule du calcul de l'espérance en faisant attention à bien faire varier les indices de la sommation dans le support trouvé en question 1. On remarque au passage que cette espérance existe sans problème puisque le support de $X$ est fini.
   (⚠ PAS de "sous réserve de convergence", que l'on garde dans le cas de sommes à support infini, ce qui n'est pas le cas ici)
   Puis on scinde la somme en deux sommes et on ne garde dans la somme que ce qui dépend de l'indice de sommation. On utilise alors le rappel et la formule donnant la somme des premiers entier. Puis on fait un peu de calcul fractionnaire
4. Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne $a$ euros losqu'il obtient le premier roi rouge.
   On note $G_1$ la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   **a.** Exprimer $G_1$ en fonction de $X$ et de $a$.
   Si on a lu l'énoncé en entier avant de commencer l'exercice, ce qui fortement recommandé, on se rend compte que l'énoncé répond à une question presque identique dans la description du second protocole. Sinon, se mettre vraiment dans la peau du joueur permet souvent d'être motivé pour savoir ce que l'on gagne !
   **b.** Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $G_1$.
   On utilise la question précédente et la propritété de linéarité de l'espérance.

## II. DEUXIÈME PROTOCOLE

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum $n$ cartes.
Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne $a$ euros losqu'il obtient le premier roi rouge.
On note $G_2$ la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte ($k \leq n$), $G_2$ est égale à $a-k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des $n$ premiers tirages, alors $G_2$ est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer $\mathrm{P}(G_2 = a-k)$.
   Avec une lecture attentive de l'énoncé, on se rend compte que si $k \leq n$, les expériences décrites dans le premier et le second protocole sont identiques. On peut donc se servir du résultat trouvé en question 2.
2. Vérifier : $\mathrm{P}(G_2 = -n) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.
   Après avoir bien pris soin de décrire l'événement avec une phrase puis avec une intersection d'événements du type $\overline{R_i}$ bien choisis, on utilise la formule des probabilités composées.
3. Montrer : $\mathrm{E}(G_2) = \frac{3(3n-1)a-(7n^2-1)}{6(2n-1)}$.
   Peu ou prou mêmes consignes qu'en question 3. du premier protocole. On fait en plus attention à prendre en compte le cas où on perd dans le calcul.

## III. COMPARAISON DES DEUX PROTOCOLES

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).
Déterminer, selon les valeurs de $a$, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse. On étudie le signe de $\mathrm{E}(G_1) - \mathrm{E}(G_2)$

# Exercice 5

Dans ce problème, la lettre $n$ désigne un entier naturel non nul.
On note $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On note $C_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** **a.** Montrer que $f_n$ est continue à droite en 0.
Pour répondre à la question, il est suffisant de calculer la limite en $0^+$ de $f_n(x)$ et de comparer le résultat à $f_n(0)$. Ne faites donc rien de plus.

**b.** Montrer que $f_n$ est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de $f_n$.
La méthode consiste à calculer la limite du taux d'accroissement de $f_n(x)$ en $0^+$ c'est à dire la limite de $\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}$ en $0^+$. Une fois seulement que l'on a trouvé une limite finie à ce calcul, on peut en déduire la dérivabilité à droite en 0 et seulement à ce moment parler de $f_n'(0^+)$ (qui sera évidemment égal à la limite trouvée).

**2.** **a.** Montrer que $f_n$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
Pour tout réel $x$ non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
La formule magique "POSFU" fonctionne aussi pour prouver la dérivabilité, rien de plus à dire !
On est attentif dans le calcul de la dérivée en utilisant les formules $(uv)' = u'v + uv'$, $(e^u)' = u'e^u$ et la dérivée de la fonction inverse. Puis on dresse un tableau de signes pour trouver le signe de $1 + \frac{n}{x}$ après l'avoir mis sous la forme d'une fraction unique.

**b.** Calculer les limites de $f_n$ en $+\infty$, $-\infty$ et $0^-$, puis donner le tableau de variation de $f_n$.
Pour les limites, quand il n'y a pas d'indétermination, on donne succinctement une détail sur les limites de chaque facteur. L'argment "d'après les croissances comparées" ne s'emploie qu'en cas de croissance comparée avérée, c'est à dire quand on est confronté à une limite **indéterminée** faisant intervenir des $x$ et des exp ou des $x$ et des $\ln$. Ce qui est le cas dans la limite en $0^-$ uniquement ici. Un minimum d'explications s'impose ici (non détaillées dans le corrigé, à vous de jouer, on débriefera en classe)

**3.** **a.** Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $e^u$ lorsque $u$ est au voisinage de 0. simple rappel de cours

**b.** En déduire que, lorsque $x$ est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On utilise la question précédente en remarquant vers quoi tend $-\frac{n}{x}$ quand $x$ tend vers + ou - l'infini.
On a le choix entre manipuler des $o(\ldots)$ ou des fonctions tendant vers 0 selon son aisance avec ce genre de calcul, pour bien gérer le dernier terme du développement (qui n'est pas un développement limité ici puisque la partie avant le $o(\ldots)$ n'est pas polynômiale)

**c.** En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, la courbe $C_n$ admet une asymptote oblique[1] $D_n$ dont on donnera une équation. Préciser la position relative de $D_n$ et $C_n$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
Pour répondre à cette question sur les asymptotes obliques, on ne prend dans le développement de la question précédente que la partie affine pour constituer une équation de droite. Le terme suivant, et particulièrement son signe, permettra de connaître les positions relatives
NB : Nulle part dans cette question, on ne parle de tangente, n'en parlez donc pas vous non plus. La méthode est identique à ce qu'on fait en un point fini avec des tangentes mais puisqu'on est en l'infini et que la droite et la courbe se rapprochent sans jamais se toucher, on ne parle ici pas de tangente mais bien d'asymptote.

**d.** Donner l'allure de la courbe $C_1$.
On sort son crayon de papier le mieux taillé, on réfléchit à une échelle adaptée, on tracer les axes, les vecteurs unité sur les deux axes, on trace l'asymptote trouvée dans la question précédente. On trace un petit segment de droite horizontale aux endroits où l'on sait que la tangente est nulle et que la courbe va localement épouser ce petit segment (en 0 à droite et en $-1$), puis avec un trait assuré et en se basant sur le tableau de variations trouvée en question 2b, on trace une magnifique courbe.

**4.** **a.** Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera $u_n$, tel que $f_n(u_n) = 1$.
On rédige correctement le théorème de la bijection sur $\mathbb{R}_+^\star$, **et on remarque qu'il n'y a aucune solution dans** $\mathbb{R}_-^\star$ d'après le tableau de variations qui prouve que $f_n(x)$ ne prend que des valeurs négatives sur cet intervalle. On conclut donc sur $\mathbb{R}^*$

**b.** Vérifier que pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}^*$, $u_n$ est strictement supérieur à 1 et que $u_n$ est solution de l'équation $x \ln x = n$.
Calculer $f_n(1)$, le comparer à 1 et utiliser la variation de $f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour conclure que $u_n > 1$.

1. Cette notion est désormais hors-programme, mais la question reste cependant traitable.

**c.** Étudier la fonction $g$ définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=x\ln x$.
Partir de la définition de $u_n$ (à savoir $f_n(u_n)=1$) et écrire des équations équivalentes en utilisant l'expression de $f_n(x)$, puis isolant l'exponentielle, puis en passant au logarithme, puis en utilisant les propriétés calculatoires du logarithme. On arrive finalement à exprimer $n$ en fonction de $u_n$.
En déduire, en utilisant la fonction $g^{-1}$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. Pour pouvoir parler de $g^{-1}$, encore faut-il prouver que l'on a le droit de le faire ! L'étude de $g$ est donc faite dans le but d'aboutir à un théorème de la bijection qui va nous assurer l'existence et la croissance de $g^{-1}$. Il est utile de dresser un petit tableau de variations de $g$ et d'en déduire un petit tableau de variations de $g^{-1}$ pour pouvoir justifier proprement la limite demandée.

**d.** Justifier que $\forall n\in\mathbb{N},\ \ln u_n+\ln(\ln u_n)=\ln n$,
Reprendre l'équation donnant $n$ en fonction de $u_n$ et lui appliquer la fonction ln. Utiliser les propriétés calculatoires du logarithme (en faisant attention à préciser que ce calcul est licite puisque $u_n>1$).
puis montrer que $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
Utiliser les négligeabilités usuelles sachant que $u_n$ tend vers $+\infty$. On se souvient que $v_n+o(v_n)\sim v_n$
En déduire un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$.
⚠ Attention, on n'a PAS le droit d'appliquer l'exponentielle à un équivalent, même si c'est extrêmement tentant.
Ici, on utilise l'équivalent précédemment trouvé et la relation $n=u_n\ln u_n$ pour trouver l'équivalent de $u_n$

**5.** **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
Le plus simple est d'invoquer la croissance de $g^{-1}$.

**b.** Montrer que $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ f_n(u_{n+1})=\exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$.
On transforme l'expression pour faire apparaître $f_{n+1}(u_{n+1})$ et on se sert du fait que $f_{n+1}(u_{n+1})=1$.

**6.** On note $I_n=\displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

**a.** Montrer que $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ 1\leq \frac{I_n}{u_{n+1}-u_n}\leq \exp\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)$.
On encadre $f_n(t)$ avec $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$ en invoquant la croissance de $f_n$ sur $[u_n;u_{n+1}]$, puis on utilise la positivité de l'intégrale, et on calcule les intégrales des membres extrêmes de l'encadrement (qui sont des intégrales de fonctions constantes, puis on divise par $u_{n+1}-u_n$, qui est strictement positif, puisque $(u_n)$ est croissante.

**b.** En déduire un équivalent de $I_n$ lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$.
On utilise le théorème des gendarmes.

**c.** Montrer alors que la série de terme général $I_n$ est divergente.
On utilise le TCSTP, on reconnaît une série télescopique et on conclut.