ENTRAINEMENT DS

Semaine du 18/11/2024

Problème 1 - Ecricome ECS 2006

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$. On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)^{\text{ème}}$ l'autre côté.

De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédent un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face. Pour $i \in \mathbb{N}^\star$, on note P_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer amène Pile » et F_i l'événement contraire.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie I - Étude des longueurs de séries

1. On note L_1 la longueur de la première série.
   Exprimer l'événement $[L_1 = n]$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+1$. En déduire que :
   $$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$$
   Vérifier que :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1.$$
2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.
   (a) Exprimer l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + k + 1$ puis calculer la probabilité de l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$.
   (b) En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^\star$,
   $$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$
   On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1$.
   (c) Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2.

Partie II - Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \frac{1}{2}$.

On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers :**

- La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)^{\text{ème}}$ l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce ;
- La dernière série se termine nécessairement au $n^{\text{ème}}$ lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : $FFPPPPFFPPP...$ (F désignant Face et P Pile), on a pour une telle sucession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1; \quad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2;$$
$$N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3; \quad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4;$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.

On admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.
3. *Simulation informatique :*
   Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le $k^{\text{ème}}$ lancer amène Pile et 0 sinon.
   On rappelle qu'en langage `Python`, la fonction `rd.randint(2)` (lorsque le module `numpy.random` est importé comme `rd`) simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0,1\}$ (soit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$). Compléter le programme informatique suivant pour que, `m` étant une valeur entière passée en paramètre, il simule les m variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_m (dont les valeurs seront placées dans le tableau `numpy` `X`) et détermine les valeurs de N_1, N_2, ..., N_m (qui seront stockées dans le tableau `N`).

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulation(m):
    X = np.zeros(m)
    N = np.zeros(m)
    X[0] = ...
    N[0] = ...
    for i in range(1,m):
        X[i] = ...
        ...
        ...
    return N
```

4. **Fonction génératrice de N_n.**
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour $s \in [0,1]$,
$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k.$$
   (a) Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.
   (b) Que représente $G_n'(1)$?
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{1,\dots,n\}$ on a
$$P([N_n = k] \cap P_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}).$$
   On admet que l'on obtiendrait de même
$$P([N_n = k] \cap F_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}).$$
   Montrer alors que
$$P(N_n = k) = \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1).$$
   (d) Soit $n \geq 2$. Montrer que
$$G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s).$$
   Calculer $G_1(s)$ et en déduire que
$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$$
   (e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

Partie III - Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. Montrer que pour tout réel x on a
$$1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}.$$

2. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge.
Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Pour $n \geq k$, on note

$$C_n = \bigcup_{k\leq i\leq n} A_i = A_k \cup \cdots \cup A_n.$$

   (a) Justifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.$$

   (b) Montrer que

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$$

   puis, en utilisant la question III.1, que

$$P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right).$$

   En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.$$

   (c) Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right)$?

   (d) Justifier que

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

   et en déduire que

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.$$

3. En considérant les événements A_n : « on obtient Pile au $(2n)^{\text{ème}}$ et au $(2n+1)^{\text{ème}}$ lancers », montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.

Exercice 2 - ESCP ECT 2019

Dans tout l'exercice, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geq 0,\ g(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

   (a) On note g' la dérivée de la fonction g. Pour tout réel $t \geq 0$, calculer $g'(t)$.

   (b) Pour tout $x \geq 0$, on pose $I(x) = \int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$. Déduire de la question précédente la valeur de $I(x)$.

   (c) Calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé, telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et admettant f comme densité.

2. On note F la fonction de répartition de X. Établir la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. On pose $Y = \frac{X^2}{1+X^2}$ et on note G la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.
   (a) Étudier les variations de la fonction Q qui, à tout réel $x \geq 0$, associe $Q(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, puis déterminer $Y(\Omega)$.
   (b) pour tout $y \in [0,1[$, calculer $G(y)$ et en déduire que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1[$.
   (c) Vérifier que $X = \sqrt{\frac{Y}{1-Y}}$, puis compléter à l'aide de la commande `rd.random` du module `numpy.random`, le script `Python` suivant afin qu'il simule la variable aléatoire X.

```
Y = ...
X = ...
```

4. Pour tout réel $h > 0$, soit T_h la fonction définie sur $R_+^\star$ par :

$$\forall x > 0,\ T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{[X>x]}([X \leq x+h]).$$

   (a) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que l'on a :

$$\lim_{h \to 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}.$$

   (b) Pour tout réel $x > 0$, on pose : $T(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$. Déterminer explicitement $T(x)$.
   (c) Pour tout réel $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^x T(t)\mathrm{d}t$ et exprimer cette intégrale en fonction de $F(x)$.

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2008

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

1. (a) Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.
   (b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.
3. **Étude de la dérivabilité de F.**
   (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$,

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x-x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{n^3}.$$

   (b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}_+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|.$$

   (d) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F' = G$.
4. **Recherche d'un équivalent en $+\infty$.**
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $f_{k+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant f_k(x)$.
   (b) En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t$.
   (c) En déduire que : $\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1} + \ln(1+x)$.

(d) Donner un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4 - EDHEC ECS 2016

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \mathrm{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Déterminer $(f - \mathrm{Id})^2 + f \circ (2\mathrm{Id} - f)$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = (f - \mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x)$.
   (c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f \circ (f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) = 0$.
   (a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant $\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1$.
   (b) En déduire que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p \geqslant 2$) et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
   Indication : *on dit que P est un polynôme annulateur de f lorsque, pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p$, on a $a_0 + a_1f + a_2f^2 + \cdots + a_pf^p = 0$.*
   (a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \ldots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P = a_1X + \cdots + a_pX^p$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
   (c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux précédentes ?