ENTRAINEMENT DS

Semaine du 18/11/2024

Problème 1 - Ecricome ECS 2006

Partie I - Étude des longueurs de séries

1. La première série contient soit que des piles soit que des faces. Et pour que la série face une taille n, il faut que tous les n premiers tirages donnent le même résultat et le $n+1$ donne le résultat contraire. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}[L_1 = n] &= (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}) \\ &= \boxed{\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \cap F_{n+1}\right) \bigcup \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \cap P_{n+1}\right).}\end{aligned}$$

Les événements $(\bigcap_{i=1}^{n} P_i) \cap F_{n+1}$ et $(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) \cap P_{n+1}$ sont disjoints donc :

$$P(L_1 = n) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \cap F_{n+1}\right) + P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \cap P_{n+1}\right).$$

Puis comme les événements P_i et F_i sont tous mutuellement indépendants, on a :

$$P(L_1 = n) = \left(\prod_{i=1}^{n} P(P_i)\right) P(F_{n+1}) + \left(\prod_{i=1}^{n} P(F_i)\right) P(P_{n+1}).$$

Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on a $P(P_i) = p$ et $P(F_i) = q$. Donc :

$$\boxed{P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.}$$

Calculons désormais :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (p^n q + q^n p) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^n q + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n p \\ &\quad \text{(les séries convergent comme série à termes géométriques de raison } < 1) \\ &= q \times \frac{p}{1-p} + p \times \frac{q}{1-q} \\ &= \frac{(1-p)p}{1-p} + \frac{p(1-p)}{p} \\ &\quad \text{(on remplace } q \text{ par } 1-p) \\ &= p + (1-p) \\ &= \boxed{1.}\end{aligned}$$

2. (a) Comme précédemment, si on commence par Pile, si l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ cela signifie que l'on a eu n Pile puis k Face et de nouveau un Pile. C'est l'inverse si on commence par Face.
On a donc :

$$\begin{aligned}&[L_1 = n] \cap [L_2 = k] \\ = &\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{k} F_{n+i}\right) \bigcap P_{n+k+1}\right) \bigcup \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{k} P_{n+i}\right) \bigcap F_{n+k+1}\right).\end{aligned}$$

Comme dans la question précédente, l'union est disjointe et les événements sont indépendants, on a donc :

$$\begin{aligned}
& P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) \\
= \;& P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{k} F_{n+i}\right) \bigcap P_{n+k+1}\right) + P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{k} P_{n+i}\right) \bigcap F_{n+k+1}\right) \\
= \;& \left(\prod_{i=1}^{n} P(P_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{k} P(F_{n+i})\right) P(P_{n+k+1}) + \left(\prod_{i=1}^{n} P(F_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{k} P(P_{n+i})\right) P(F_{n+k+1}) \\
= \;& p^n q^k p + q^n p^k q \\
= \;& \boxed{p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k.}
\end{aligned}$$

(b) On utilise désormais la formule des probabilités totales appliqué au système complet d'événements $\{[L_1 = n]\}_{n \geq 1}$:

$$\begin{aligned}
P(L_2 = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([L_2 = k] \cap [L_1 = n]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k) \\
&= q^k p \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p^k q \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \\
&\quad \text{(les deux séries convergent bien donc on peut séparer la somme)} \\
&= q^k p \frac{p}{1-p} + p^k q \frac{q}{1-q} \\
&= \frac{q^k p^2}{q} + \frac{p^k q^2}{p} \\
&= \boxed{q^{k-1} p^2 + p^{k-1} q^2.}
\end{aligned}$$

(c) L_2 admet une espérance si la série : $\sum_{k=1}^{+\infty} kP(L_2 = k)$ converge absolument. Comme L_2 est positive, c'est équivalent à la convergence simple.

On a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(L_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(q^{k-1} p^2 + p^{k-1} q^2).$$

Or les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} p^2$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} q^2$ convergent : ce sont des séries géométriques dérivées. L_2 admet donc une espérance et on a :

$$\begin{aligned}
E(L_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} p^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} q^2 \\
&= p^2 \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \frac{1}{(1-p)^2} \\
&= p^2 \frac{1}{p^2} + q^2 \frac{1}{q^2} \\
&= \boxed{2.}
\end{aligned}$$

Partie II - Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers

1. - N_1 est le nombre de séries sur la première valeur. On a donc toujours $N_1 = 1$. Ainsi N_1 suit une loi certaine. On a donc $\boxed{E(N_1) = 1}$.
   - Pour deux lancers, on peut avoir 1 (tous les résultats sont identiques) ou 2 (on obtient un résultat de chaque) séries. Donc $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
     On a alors :
     $$\begin{aligned} P(N_2 = 1) &= P((F_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2)) \\ &= P(F_1)P(P_2) + P(P_1)P(F_2) \\ &\quad \text{(incompatibilité puis indépendance)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$
     On a donc $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = \boxed{\frac{1}{2}}$ puisque ces événements sont contraires dans le cas particulier où on se limite aux deux premiers lancers.
     On en déduit :
     $$\boxed{E(N_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.}$$
   - On a de manière similaire $N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
     On peut calculer explicitement $P(N_3 = k)$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$ en donnant les événements à chaque fois, mais on va plutôt s'inspirer de la question suivante afin de commencer à voir comment cela peut marcher dans le cas général.
     Cas $N_3 = 1$: S'il y a une seule série, cela signifie que les résultats de tirage sont tous les mêmes (soit tous Pile soit tous Face). On a donc :
     $$[N_3 = 1] = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \bigcup (F_1 \cap F_2 \cap F_3).$$
     Par incompatibilité et indépendance, on obtient :
     $$P(N_3 = 1) = p^3 + q^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}.}$$
     On va regarder l'autre cas extrême : $[N_3 = 3]$. Cette fois, tous les résultats ne seront pas les mêmes. Mais pour avoir 3 séries, on doit changer de résultat à chaque fois et donc, dès que le premier résultat est connu (pile ou face), tous les suivants sont nécessaires. Ainsi :
     $$[N_3 = 3] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \bigcup (F_1 \cap P_2 \cap F_3).$$
     Puis :
     $$P(N_3 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}.}$$
     Et encore une fois, on déduit :
     $$P(N_3 = 2) = 1 - P(N_3 = 1) - P(N_3 = 3) = \boxed{\frac{1}{2}.}$$
     On peut désormais calculer :
     $$\boxed{E(N_3) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2.}$$

2. Comme dans la question précédente, on a toujours au moins 1 séries et sur n lancers, on en a au plus n, toutes les valeurs entières intermédiaires étant possibles. On a donc :

$$\boxed{N_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

On a alors :

$$[N_n = 1] = \left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right).$$

On en déduit, encore une fois par incompatibilité puis par indépendance :

$$\boxed{P(N_n = 1) = p^n + q^n = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

De même, on peut expliciter l'événement $[N_n = n]$ comme dans la question précédente pour $[N_3 = 3]$:

$$[N_n = n] = \Bigg(\underbrace{P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap F_n}_{n \text{ termes}}\Bigg) \bigcup \Bigg(\underbrace{F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap P_n}_{n \text{ termes}}\Bigg).$$

où pour des facilités d'écriture, j'ai écris le dernier terme dans le cas n pair. On en déduit, une dernière fois par incompatibilité puis par indépendance :

$$\boxed{P(N_n = n) = \underbrace{p \times q \times p \times \cdots \times q}_{n \text{ termes}} + \underbrace{p \times q \times p \times \cdots \times q}_{n \text{ termes}} = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

Le cas impair donne le même résultat grâce à la condition $p = q = \frac{1}{2}$ que l'on s'est donnée pour cette question.

3.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulation(m):
    X = np.zeros(m)
    N = np.zeros(m)
    X[0] = rd.randint(2)
    N[0] = 1
    for i in range(1,m):
        X[i] = rd.randint(2)
        if X[i] == X[i-1]:
            N[i] = N[i-1]
        else:
            N[i] = N[i-1] + 1
    return N
```

4. **Fonction génératrice de N_n.**

   (a) Le sujet ne pose pas la question de la convergence et pour cause : la somme est finie.
   En ce qui concerne l'espérance, on peut appliquer le théorème de transfert (qui ne soulève donc aucune question de convergence) :

$$\boxed{E(s^{N_n}) = \sum_{k=1}^{n} s^k P(N_n = k) = G_n(s).}$$

   (b) La somme étant finie, G_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables. On a de plus pour $s \in [0, 1]$:

$$G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) k s^{k-1}.$$

Donc :

$$G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)k1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)k.$$

On reconnaît l'espérance de N_n. Donc :

$$\boxed{G_n'(1) = E(N_n).}$$

(c) L'événement $[N_n = k] \cap P_n$ est l'événement « il y a k séries sur les lancers 1 à n et le dernier lancer est Pile » . Si on suppose que cet événement a lieu et si on se concentre sur les lancers 1 à $n-1$, il y a alors deux possibilités : soit le dernier Pile en $n+1$ est le début d'une nouvelle série, soit il en prolonge une. Formalisons le en terme d'événements.

Il faut se concentrer sur le lancer $n-1$. Les événements F_{n-1} et P_{n-1} forment un système complet d'événements. Donc :

$$[N_n = k] \cap P_n = ([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) \cup ([N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

où l'union est disjointe. Par incompatibilité des événements, on a donc :

$$P([N_n = k] \cap P_n) = P([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) + P([N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_{n-1}).$$

Commençons par calculer $P([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n)$. On a :

$$[N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n = [N_{n-1} = k] \cap P_{n-1} \cap P_n$$

puisque si P_n et P_{n-1} sont tous deux réalisés, le nombre de séries ne changent pas de $n-1$ à n. Donc :

$$P([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1})P(P_n)$$

où la dernière égalité utilise l'indépendance des événements. Et donc finalement :

$$\boxed{P([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}).}$$

De même, on a :

$$[N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n = [N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1} \cap P_n$$

puisque si P_n et F_{n-1} sont tous deux réalisés, le nombre de séries augmentede 1 de $n-1$ à n. Donc :

$$P([N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1})P(P_n)$$

où la dernière égalité utilise l'indépendance des événements. Et donc finalement :

$$\boxed{P([N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}).}$$

En regroupant, on obtient bien :

$$\boxed{P([N_n = k] \cap P_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}).}$$

On admet la formule donnée par l'énoncé :

$$P([N_n = k] \cap F_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}).$$

Et on utilise désormais la formule des probabilités totales appliquée au système complet P_n, F_n :

$$\begin{aligned}
P(N = k) &= P([N = k] \cap P_n) + P([N = k] \cap F_n) \\
&= \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}) \\
&+ \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}) \\
&= \frac{1}{2}\left(P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1})\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}) + P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1})\right) \\
&\quad \text{(on regroupe les termes selon la valeur de } N_{n-1}\text{)} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1).}
\end{aligned}$$

La dernière ligne provient de l'utilisation de la formule des probabilités totales appliquée avec le système $\{P_{n-1}, F_{n-1}\}$ sur chacune des parenthèses.

(d) Soit $n \geq 2$ et soit $s \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}
G_n(s) &= \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1)\right) s^k \\
&\quad \text{(Formule de la question précédente valable car } n \geq 2\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k)s^k + \sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k-1)s^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k)s^k + \sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k-1)s^k\right) \\
&\quad \text{(le dernier terme de la 1}^{\text{ère}}\text{ somme est nul car } P(N_{n-1} = n) = 0\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k)s^k + \sum_{k'=0}^{n-1} P(N_{n-1} = k')s^{k'+1}\right) \\
&\quad \text{(changement d'indice } k' = k-1\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k)s^k + \sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k)s^{k+1}\right) \\
&\quad \text{(le premier terme de la 2}^{\text{ème}}\text{ somme est nul car } P(N_{n-1} = 0) = 0\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k)s^k + s\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k)s^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(G_{n-1}(s) + sG_{n-1}(s)\right) \\
&= \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s).
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s).}$$

À s fixé, $(G_n(s))$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$.

Calculons désormais :

On en déduit l'expression de la suite géométrique :

$$\boxed{G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} G_1(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.}$$

(e) Il suffit de se rappeler que $G'_n(1) = E(N_n)$ et c'est cette espérance que l'on veut calculer. D'après la question précédente, on a :

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$$

G_n est donc dérivable (on le savait déjà dans les premières questions) et :

$$G'_n(s) = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} s + \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

Donc :

$$G'_n(1) = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2} \times 1 + \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}.$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{E(N_n) = \frac{n+1}{2}.}$$

Partie III - Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est convexe puisque sa dérivée seconde est $x \mapsto -(-\mathrm{e}^{-x})$ est positive. Elle est donc au dessus de sa tangente en n'importe quel point. Une équation de sa tangente en 0 est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x + 1.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}.}$$

2. (a) La série de terme général $P(A_i)$ diverge. Or c'est une série à termes positifs, elle diverge donc vers $+\infty$. On a donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} P(A_i)}_{\to+\infty} - \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} P(A_i)}_{\text{constant}} \right) \\ &= \boxed{+\infty.} \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} P(C_n) &= P\left(\bigcup_{k\leq i\leq n} A_i\right) \\ &= 1 - P\left(\overline{\bigcup_{k\leq i\leq n} A_i}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{k\leq i\leq n} \overline{A_i}\right) \\ &= \boxed{1 - \prod_{k=i}^{n} P(\overline{A_i}).} \end{aligned}$$

(car les $\overline{A_i}$ sont indépendants)

Or pour tout $i \in [\![k, n]\!]$, on a :

$$P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$$

et d'après la première question, on a :

$$1 - P(A_i) \leq \exp(-P(A_i)).$$

Donc :

$$0 \leq P(\overline{A_i}) \leq \exp(-P(A_i))$$

où on a précisé que $P(A_i)$ est positive car c'est une probabilité. Cela de les multiplier termes à termes pour obtenir :

$$\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \leq \prod_{i=k}^{n} \exp(-P(A_i))$$

c'est-à-dire :

$$-\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \geq -\exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right).$$

Donc :

$$\boxed{P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right).}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$ (d'après la question précédente) donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right) = 0.$$

Par passage à la limite des inégalités larges, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} P(C_n) \geq 1.$$

Or $P(C_n)$ est une probabilité et donc inférieure à 1. Par passage à la limite, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} P(C_n) \leq 1.$$

Et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.}$$

(c) Pour tout $n \geq k$, on a $C_{n+1} = C_n \cup A_{n+1}$. Donc $\boxed{C_n \subset C_{n+1}}$. Ainsi la suite d'événements $(C_n)_{n\geq k}$ est croissante pour l'inclusion.

On en déduit par le théorème de la limite monotone pour les probabilités que :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=k}^{n} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.}$$

(d) On a clairement :

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

puisque $A_i \subset C_i$ pour tout $i \geq k$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\omega \in \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Montrons que $\omega \in \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$.

Comme $\omega \in \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$, il existe $n \geq k$ tel que $\omega \in C_n$. Or $C_n = \bigcup_{i=k}^{n} A_i$. Donc $\omega \in \bigcup_{i=k}^{n} A_i$. Donc il existe $i \in [\![k, n]\!]$ tel que $\omega \in A_i$.

Comme $\omega \in A_i$, ω appartient également à l'union $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. Donc :

$$\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i.$$

Donc par double inclusion :

$$\boxed{\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.}$$

On en déduit :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n\right) = 1.}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note l'événement A_n : « on obtient Pile au $(2n)^{\text{ème}}$ et au $(2n+1)^{\text{ème}}$ lancers ».

On va bien sûr utiliser la question précédente, mais pour cela il faut d'abord vérifier que la série des $P(A_n)$ diverge. On a :

$$\begin{array}{rcl} P(A_n) & = & P(P_{2n} \cap P_{2n+1}) \\ & = & P(P_{2n})P(P_{2n+1}) \\ & & \text{(indépendance)} \\ & = & p^2. \end{array}$$

Donc $P(A_n)$ ne dépend pas de n et la série des $P(A_n)$ diverge (et même diverge grossièrement).
Donc d'après la question précédente, on a :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.}$$

Notons l'événement B_k : « on obtient deux Pile consécutifs après le lancer k ». On a :

$$\begin{aligned} B_k &= \bigcup_{i=k}^{+\infty}(P_k \cap P_{k+1}) \\ &= \bigcup_{i=k}^{+\infty}(P_{2k} \cap P_{2k+1}) \bigcup \bigcup_{i=k}^{+\infty}(P_{2k+1} \cap P_{(2k+1)+1}) \\ &\quad \text{(On sépare les termes pairs et impairs)} \\ &= \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty}(P_{2k+1} \cap P_{(2k+1)+1})\right). \end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset B_k.}$$

Ainsi :

$$P(B_k) \geq P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) \geq 1.$$

Or $P(B_k) \leq 1$ puisque c'est une probabilité. Donc :

$$\boxed{P(B_k) = 1.}$$

Ainsi la probabilité d'obtenir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut bien 1.

Exercice 2 - ESCP ECT 2019

1. (a) g est bien dérivable comme quotient. De plus, pour $t \geq 0$, on a :

$$\boxed{g'(t) = -\frac{-2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^2} = f(t).}$$

(b) $I(x)$ est une intégrale sur un segment (la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$). On a donc pour $x \geq 0$:

$$\boxed{I(x) = \int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1+t^2}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x^2}.}$$

(c) Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\int_0^A f(t)\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = I(A).$$

Or $I(A) = 1 - \frac{1}{1+A^2}$. Et donc :

$$\int_0^A f(t)\mathrm{d}t = 1 - \underbrace{\frac{1}{1+A^2}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1}$. De plus pour $t < 0$, $f(t) = 0$ donc $\int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{d}t = 0$.
D'où :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1.}$$

Ainsi f est une fonction positive, continue et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ convergente égale à 1, c'est donc bien une densité de probabilité.

2. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

La deuxième ligne est la formule de la fonction de répartition lorsque l'on connaît la densité.
Si $x < 0$, alors comme $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$, on a $F(x) = 0$.
Si $x \geq 0$, alors on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = I(x).$$

Donc :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.}$$

3. (a) La fonction Q est dérivable comme quotient et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$Q'(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

qui est du signe de x et donc strictement positif sur $\mathbb{R}_+^\star$. Ainsi Q est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ également.
De plus :

$$Q(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} Q(x) = 1.$$

Comme Q est continue, le théorème de la bijection s'applique. Q est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, 1]$.
Comme $Y = Q(X)$ et que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, on a :

$$\boxed{Y(\Omega) = Q(\mathbb{R}_+) = [0, 1[.}$$

(b) Soit $y \in [0, 1[$. On a :

$$G(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X^2}{1+X^2} \leq y\right) = P(X^2 \leq y(1+X^2)). \text{ (puisque } 1+X^2 > 0)$$

Donc :

$$G(y) = P(X^2(1-y) \leq y) = P\left(X^2 \leq \frac{y}{1-y}\right). \text{ (car } 1-y > 0 \text{ puisque } y < 1)$$

Puis :

$$\begin{aligned} G(y) &= P\left(-\sqrt{\frac{y}{1-y}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y}{1-y}}\right) \text{ (car } \frac{y}{1-y} \geq 0 \text{ puisque } y \in [0,1[) \\ &= P\left(X \leq \sqrt{\frac{y}{1-y}}\right) \text{ (parce que } X \geq 0 \text{ presque sûrement)} \\ &= F\left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right). \end{aligned}$$

Or pour $y \in [0,1[$, on a : $0 \leq \sqrt{\frac{y}{1-y}}$. Donc :

$$F\left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right) = \frac{\left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)^2}{1+\left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)^2} = \frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}} = \frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{1-y+y}{1-y}} = y.$$

D'où finalement, pour tout $y \in [0,1[$:

$$\boxed{G(y) = y.}$$

De plus, en tant que fonction de répartition G est croissante. Donc pour tout $y \leq 0$, on a $G(y) \leq G(0) = 0$. Or G est positive. Donc pour tout $y \leq 0$, on a $G(y) = 0$.
De même, pour tout $y \geq 1$, on a $G(y) \geq G(1)$. Or :

$$G(1) = P(Y \leq 1) = 1$$

puisque $Y(\Omega) = [0,1[$.
Donc $G(y) \geq 1$ pour tout $y \in [0,1[$ et comme G est nécessairement plus petit que 1 (c'est une probabilité), on a $G(y) = 1$ pour tout $y \in [0,1[$.
Ainsi pour $y \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y \end{cases}}$$

c'est-à-dire que G est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1[$. Donc Y suit la loi uniforme sur $[0,1[$.

(c) On a :

$$\begin{aligned} & Y = \frac{X^2}{1+X^2} \\ \Leftrightarrow\ & (1+X^2)Y = X^2 \\ & \text{(pas de problème de division par 0 en remontant)} \\ \Leftrightarrow\ & X^2(Y-1) = -Y \\ \Leftrightarrow\ & X^2 = \frac{Y}{1-Y} \\ & \text{(puisque } 1 \notin Y(\Omega)) \\ \Leftrightarrow\ & X = \sqrt{\frac{Y}{1-Y}}. \\ & \text{(car } X \geq 0) \end{aligned}$$

On peut donc simuler X avec le code suivant :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

Y = rd.random()
X = np.sqrt(Y/(1-Y))
```

4. (a) Soit $x > 0$. Pour $h > 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} T_h(x) & = & \dfrac{1}{h} \times P_{[X>x]}([X \leq x+h]) \\ & = & \dfrac{1}{h} \times \dfrac{P([X>x] \cap [X \leq x+h])}{P(X>x)} \\ & = & \dfrac{1}{h} \times \dfrac{P(x < X \leq x+h)}{P(X>x)} \\ & = & \dfrac{\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t}{h} \dfrac{1}{1-P(X \leq x)} \\ & = & \dfrac{\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t}{h} \dfrac{1}{1-F(x)}. \end{array}$$

Comme F est une primitive de f, on a :

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) = f(x).$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{h \to 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}.}$$

(b) Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{array}{rcl} T(x) & = & \dfrac{f(x)}{1-F(x)} \\ & = & \dfrac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{1-\frac{x^2}{1+x^2}} \\ & = & \dfrac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}} \\ & = & \boxed{\dfrac{2x}{1+x^2}.} \end{array}$$

(c) Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^x T(t)\mathrm{d}t & = & \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ & = & \left[\ln(1+t^2)\right]_0^x \\ & = & \boxed{\ln(1+x^2).} \end{array}$$

Il y a plusieurs moyens de trouver l'expression en fonction de f. On peut reconnaître que $T(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$ est de la même forme que la dérivée de $-\ln \circ (1-F)$.
On peut aussi remarquer que comme : $F(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ pour $x \geq 0$, on a :

$$x^2 = \frac{F(x)}{1-F(x)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^x T(t)\mathrm{d}t &= \ln(1+x^2)\\ &= \ln\left(1+\frac{F(x)}{1-F(x)}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1-F(x)+F(x)}{1-F(x)}\right)\\ &= \boxed{-\ln(1-F(x)).}\end{aligned}$$

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2008

J'ai failli écrire « cf DS précédent ». Mais bon, pour que vous puissiez regarder dès la sortie du DS, revoici la correction.

1. (a) Soit $x \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x-n}{n(n+x)} = \frac{x}{n(n-x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2}$ converge (critère de Riemann). Donc par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } f_n(x) \text{ converge également.}}$

(b) On a :

$$\boxed{F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+0}\right) = 0.}$$

On a également $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Passons aux sommes partielles. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}0}.$$

Donc $\boxed{F(1) = 1.}$

2. Commençons par remarquer que f_n est effectivement dérivable sur $\mathbb{R}_+$ dès lors que $n \geqslant 1$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Encore une fois $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann. Donc, par équivalence de termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } f_n'(x) \text{ converge.}}$

3. (a) φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi''(x) = \frac{2}{x^3}$. Cette dérivée seconde est décroissante, donc sur l'intervalle $[n, +\infty[$, on peut la majorer par sa valeur en n.
Donc l'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne à l'ordre 2, au voisinage de $x_0 \in [n, +\infty[$:

$$\boxed{|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x-x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2}\varphi''(n) \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} \times \frac{2}{n^3} \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{n^3}.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et soit $h \neq 0$ tel que $x+h \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned}|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} - h\frac{1}{(n+x)^2}\right|\\ &= \left|-\varphi(n+x+h) + \varphi(n+x) + ((n+x+h)-(n+x))\varphi'(n+x)\right|\\ &\underset{\text{signe inversé}}{=} \left|\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - ((n+x+h)-(n+x))\varphi'(n+x)\right|\\ &\leqslant \frac{h^2}{n^3}.\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^2}{n^3}$ converge (critère de Riemann). Donc, par comparaison,
$\boxed{\text{la série de terme général } |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \text{ converge absolument donc converge.}}$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et soit $h \neq 0$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| &= \left|\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{h}\left(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)\right)\right| \\
&\quad \textit{(somme de séries convergentes)} \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \\
&\quad \textit{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^2}{n^3} \\
&\leqslant |h| \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}}_{\text{constante}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, on a bien :

$$\boxed{\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|.}$$

(d) Ainsi, on a :

$$0 \leqslant \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant \underbrace{K|h|}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

Donc, par encadrement $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = G(x)$ c'est-à-dire la limite existe et est réelle.
$\boxed{F \text{ est donc dérivable en } x}$ et on a :

$$\boxed{F'(x) = G(x).}$$

4. (a) $x \in \mathbb{R}_+$ est fixé. On étudie alors la fonction $\psi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $t \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\psi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} \leqslant 0$.
Donc ψ est décroissante et donc pour $k \in \mathbb{N}^\star$:

$$\forall t \in [k, k+1],\ \psi(k+1) \leqslant \psi(t) \leqslant \psi(k)$$

qui peut aussi s'écrire $\forall t \in [k, k+1],\ f_{k+1}(x) \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leqslant f_k(x)$. Par croissance de l'intégrale, on trouve :

$$\boxed{\underbrace{\int_k^{k+1} f_{k+1}(x)\mathrm{d}t}_{=f_{k+1}(x)} \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} f_k(x)\mathrm{d}t}_{=f_k(x)}.}$$

(b) On somme l'inégalité de droite précédente, avec $n \geqslant 2$:

$$\boxed{\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t}_{=\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x).}$$

On obtient bien la première inégalité.

Pour l'autre inégalité, on procède de manière similaire :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x)}_{=\sum_{k'=2}^{n} f_{k'}(x)} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t}_{=\int_1^n \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t}.$$

On rajoute alors le premier terme manquant de la somme :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \underbrace{f_1(x)}_{=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.}$$

On a bien finalement :

$$\boxed{\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.}$$

(c) Le but est de passer à la limite $n \to +\infty$. Calculons d'abord la forme des termes de gauche et droite.

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^n = \ln(n) - \ln(n+x) - \ln(1) + \ln(1+x) = \ln \frac{n(1+x)}{n+x}.$$

On a $\frac{n(1+x)}{n+x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+x$ donc : $\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x)$.
Par passage à la limite, on en déduit l'encadrement :

$$\boxed{\ln(1+x) \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)}_{=F(x)} \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

(d) Puisqu'on étudie la limite $x \to +\infty$, on peut diviser par $\ln(1+x)$. On obtient pour $x > 0$:

$$1 \leqslant \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \leqslant \underbrace{\frac{x}{(x+1)\ln(1+x)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} + 1.$$

Donc par encadrement, $\frac{F(x)}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1+x).}$$

Exercice 4 - EDHEC ECS 2016

1. (a) On a :

$$(f-\mathrm{Id})^2 + f \circ (2\mathrm{Id} - f) = f^2 - 2f + \mathrm{Id} + 2f - f^2 \boxed{= \mathrm{Id}.}$$
(car f et Id commutent)

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a donc $\boxed{(f-\mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x) = \mathrm{Id}(x) = x.}$

(c) Le résultat permet de montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$x = (f-\mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x).$$

Or $(f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x) = f((2\mathrm{Id} - f)(x)) \in \mathrm{Im}(f)$ par définition. De plus, on a :

$$f((f - \mathrm{Id})^2(x)) = (f \circ (f - \mathrm{Id})^2)(x) = 0.$$

Donc $(f - \mathrm{Id})^2(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, on peut écrire :

$$x = \underbrace{(f - \mathrm{Id})^2(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{(f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)}.$$

Donc on a bien $x \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ et donc $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f).}$

Il reste à prouver que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe. Faisons-le par un calcul sur les dimensions. On a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) - \dim \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f).$$

Or $\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim \mathbb{R}^n = n$. De plus, d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Donc nécessairement :

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = 0.}$$

Cela implique que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et donc que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont en somme directe.}}$

Donc finalement $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. On écrira $P = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) & = & 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(X^2 - 5X + 4) + X(aX + b) & = & 1 \\ \Leftrightarrow X^2 - 5X + 4 + 4aX^2 + 4bX & = & 4 \\ \Leftrightarrow (4a+1)X^2 + (4b-5)X & = & 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4a + 1 & = & 0 \\ 4b - 5 & = & 0 \end{array} \right. & & \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{4} \\ b & = & \frac{5}{4} \end{array} \right. & & \end{array}$$

Ainsi $\boxed{P = -\frac{1}{4}X + \frac{5}{4} \text{ est l'unique polynome de degré 1}}$ tel que :

$$\boxed{\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1}$$

(b) Comme f et Id commutent, on peut faire les mêmes calculs en remplaçant X par f. On trouve alors :

$$\boxed{\frac{1}{4}(f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) + f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\mathrm{Id}\right) = \mathrm{Id}.}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{x = \frac{1}{4}((f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}))(x) + (f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\mathrm{Id}\right))(x).}$$

Comme dans la première question, on peut alors remarquer que :

$$(f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\mathrm{Id}\right))(x) = f(\left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\mathrm{Id}\right)(x)) \in \mathrm{Im}(f)$$

et : $f(\frac{1}{4}((f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}))(x)) = \frac{1}{4}f \circ (f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id})(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc $\frac{1}{4}((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}))(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. D'où :

$$\boxed{x = \underbrace{\frac{1}{4}((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}))(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{\left(f \circ \left(-\frac{1}{4}f+\frac{5}{4}\mathrm{Id}\right)(x)\right)}_{\in \mathrm{Im}(f)}.}$$

Ainsi, on a $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f).}$
Il reste à prouver que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe. On procède exactement comme dans la question 1 :

$$\dim \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f))}_{=n} - \underbrace{(\dim \mathrm{Ker}(f)+\dim \mathrm{Im}(f))}_{=n} = 0.$$

D'où $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f).}$

3. (a) Comme P est de degré p, il existe $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tel que $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p$ où $a_p \neq 0$. On a $P(0) = 0$. Donc :

$$\underbrace{a_0 + a_1\times 0 + a_2 \times 0^2 + \cdots + a_p \times 0^p}_{=a_0} = 0.$$

Donc $\boxed{P = a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p.}$
De plus $P'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + pa_pX^{p-1}$. Donc $P'(0) = a_1$. Et comme $P'(0) \neq 0$, on a : $\boxed{a_1 \neq 0.}$
Donc $\boxed{\text{il existe bien } (a_1,\dots,a_p)\in\mathbb{R}^p \text{ avec } a_1\neq 0 \text{ (et même } a_p \neq 0) \text{ tel que } P = a_1X + a_2X^2+\cdots+a_pX^p.}$

(b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$. Montrons que $x = 0$.
Comme $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$, tel que $x = f(y)$. Comme P est un polynôme annulateur de f, on a :

$$a_1f(y) + a_2(f\circ f)(y) + \cdots + a_pf^p(y) = 0$$

que l'on peut réécrire dans ce contexte : $a_1x + a_2f(x) + \cdots + a_pf^{p-1}(x) = 0$.
Or $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Donc $f(x) = \cdots = f^{p-1}(x) = 0$ puis :

$$a_1x = 0.$$

Et comme $a_1 \neq 0$, on a finalement $\boxed{x = 0.}$
$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Im}(f) \text{ et } \mathrm{Ker}(f) \text{ sont en somme directe.}}$
De plus, d'après le théorème du rang, on a : $\dim\mathrm{Im}(f)+\dim\mathrm{Ker}(f) = \dim\mathbb{R}^n$. Et ainsi, par égalité des dimensions, on a :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^n.}$$

(c) Les deux questions précédentes sont l'application de cette question avec $P = X(X-1)^2$ et $P = X(X-1)(X-4)$ respectivement. On a bien dans chaque cas que ce sont des polynômes annulateurs de degré au moins 2, avec $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.