TD10 - Applications linéaires

1 Exercices pour commencer

Exercice 1 ⋆

1. Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires, puis donner leur noyau et leur image, précisez quand elles sont injective ou surjectives, et donner leur matrice dans les bases canoniques :
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x, y) \mapsto (x,\ 2x - 3y,\ x + 4y)$,
   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x, y) \mapsto (-x + y,\ x - y,\ 2x + 2y)$,
   (c) $h = 2f - 3g$,
   (d) $\ell : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \to & \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x,y,z,t) & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x-t & y+t \\ 3x+z & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.
2. On suppose que f est une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2), telle que $f(\epsilon_1) = e_1 - 2e_2$, $f(\epsilon_2) = 3e_1$ et $f(\epsilon_3) = 2e_1 + e_2$. Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2 ⋆

Soit g l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\mathrm{Im}(g)$.

Exercice 3 ⋆⋆

1. On considère les matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que l'application φ définie pour toute matrice M de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = AM - MB$ est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
   Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire quand à la bijectivité de φ ?
2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application définie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = AMA$.
   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   Que peut-on dire si A est inversible ?

Exercice 4 ⋆⋆

Soient f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f\big((x, y)\big) = (x-2y, x, 3x+y)$ et g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g\big((x, y, z)\big) = (x + 3y + 2z, -2x + z)$.

1. Déterminer l'application $g \circ f$ et montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Qu'en est-il de l'application $f \circ g$?
3. Retrouver ces résultats en se servant des matrices d'applications linéaires.

Exercice 5 ⋆⋆

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$f(x, y, z) = (z + y - x, x + z - y, x + y - z)$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base standard $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de $f \circ f$ de deux façons différentes :
   (a) en calculant les images par $f \circ f$ des vecteurs de la base standard
   (b) en calculant le produit A^2.
3. En déduire une expression $f \circ f(x, y, z)$ pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 ⋆⋆

Dans chaque cas, déterminer l'application linéaire f canoniquement associée à la matrice A :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 ⋆⋆

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base standard est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $f(2, 3, -1)$, puis $f(0, 1, 5)$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x, y, z) = (2, 1, 3)$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Im} f$.
   (d) Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

2. Soit E un espace vectoriel ayant pour base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $f(e_1 + 2e_2)$, $f(2e_3 - 3e_1)$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = e_1 + e_2$, puis $f(x) = 2e_1 + e_2 + e_3$, où x est un élément de E.
   (c) Déterminer $\mathrm{Im} f$.
   (d) Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

Exercice 8 ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$E_\lambda(f) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 9 - Vrai ou faux ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier.
Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.
2. Si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
3. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice.
4. Si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice.
5. Si $\mathrm{Im}(f) = F$ alors f est injective.
6. Si $\mathrm{Im}(f) = F$ et $\dim(F) = \dim(E)$ alors f est injective.
7. Si g est une autre application linéaire de E dans F avec $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\ker(f) = \ker(g)$ alors $f = g$.

Exercice 10 ⋆⋆

On considère les vecteurs de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :
$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Soit g l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par :
$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$
En supposant admis le fait que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ de l'endomorphisme g dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 11 ⋆⋆

Montrer que $P = X^2 - 5X + 4$ est un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
En déduire que A est inversible, puis donner A^{-1}.

Exercice 12 ⋆⋆

1. Soient $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_1$.
Soient $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, 1, 2)$.
On admettra que $\mathcal{C}_1 = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   (a) Donner la matrice de passage $P_1 = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}$ de la base canonique $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{C}_1$.
   (b) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On note A sa matrice dans la base standard et B sa matrice dans la base $\mathcal{C}_1$.
   Exprimer B en fonction de A, P_1 et P_1^{-1}.
   (c) Application : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (-2x + 2y - 4z, -3x + 3y - 4z, 3x - y + 6z)$.
   Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{C}_1$.
2. Soient $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_3$.
Soient :
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
On admettra que $\mathcal{C}_3 = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Donner la matrice de passage $P_3 = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{C}_3}$ de la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à sa base $\mathcal{C}_3$.
   (b) Soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant pour matrice G dans la base standard et H dans la base $\mathcal{C}_3$.
      i. On suppose que H est inversible. Que peut-on dire de G ?
      ii. Donner une lien entre G, H et P_3.
      iii. On suppose que $H^3 + 2H + I = 0$. En déduire une relation vérifiée par f, puis une relation vérifiée par G.
      iv. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G - \lambda I$ n'est pas inversible. Que peut-on en déduire pour $f - \lambda id$, puis pour $H - \lambda I$?
      v. Quelle sera la matrice de f^n dans la base standard ? dans la base $\mathcal{C}_3$?
      Établir enfin un lien entre ces deux matrices.

2 Approfondissements

Exercice 13 ⋆⋆

Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires, déterminer leur noyau, leur rang, leur image et donner leur matrice dans les bases canoniques adaptées :

1. $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X];\ P \mapsto 2P' - XP$
2. ⋆ φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = Q$ avec Q le polynôme défini par $Q(x) = P(x+1) - P(x)$
3. $Tr : \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R};\ M \mapsto m_{1,1} + m_{2,2} + m_{3,3}$
4. Montrer que l'application f définie pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ par $f(P) = X^2P' - 2XP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 14 ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 - 2f = 0$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2Id) = \mathrm{Im}(f)$
2. Si de plus E est de dimension finie, montrer que $\mathrm{Im}(f - 2Id) = \mathrm{Ker}(f)$

Exercice 15 ⋆⋆

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g).$$

Exercice 16 ⋆⋆

1. Soient $P = 1 - 3X + X^2$, $Q = 1 + 3X$, $R = 1 + X + X^2 + X^3$, $S = 1$. $\mathcal{C}_2 = (P, Q, R, S)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base $\mathcal{C}_2$ est $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $f(2+X^2)$, $f(2+4X+X^2+X^3)$, $f(4+X+2X^2+X^3)$.
   (b) Résoudre l'équation $f(Y) = 2+3X$, puis $f(Y) = 2 - 3X + X^2$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Im} f$.
   (d) Déterminer $\mathrm{Ker} f$.
2. Soient :
   $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$
   $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$
   La famille $\mathcal{C}_3 = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Soit f l'endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base $\mathcal{C}_3$ est $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Résoudre l'équation $f(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $f(M) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, où M est une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Im} f$.
   (d) Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

Exercice 17 ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^2(x) \neq 0$ mais $u^3(x) = 0$.

1. Montrer que $\big(x, u(x), u^2(x)\big)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B} = \big(x, u(x), u^2(x)\big)$.
3. u est-il bijectif ?
4. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $3u^2 - 2u + \mathrm{Id}$ dans la base $\mathcal{B}$.
5. Soit $v = \mathrm{Id} + 2u$. Montrer que v est bijectif et déterminer la matrice de l'endomorphisme v^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 18 - Polynômes de Lagrange ⋆⋆

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts. On considère l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

   (a) Calculer $\varphi(L_i)$.
   (b) En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. Et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$.
2. Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $(g(e_1),\ldots,g(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$. En déduire que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension $n > 1$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

3 Exercices de concours

Exercice 21 - Oral ESCP 2019 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension n où $n \geq 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

1. Soit u un endomorphisme de E. Le but de cette question est de montrer qu'il existe un endomorphisme w de E tel que $u = u \circ w \circ u$. On note r le rang de u.
   (a) Traiter les cas $r = 0$ et $r = n$.
   (b) On suppose maintenant que $r \in [\![1, n-1]\!]$.
      i. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ soit libre et telle que, pour tout entier $i \in [\![r+1, n]\!]$, $u(e_i) = 0$.
      ii. En déduire l'existence de w.
2. Pour tout endomorphisme f de E, on note Φ_f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par :
$$\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \Phi_f(g) = f \circ g - g \circ f.$$
   On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^p = 0$.
   (a) Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^\star$ que, pour tout endomorphisme g de E, on a :
$$(\Phi_f)^m(g) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ g \circ f^k.$$
   (b) Montrer que Φ_f est nilpotent.
3. Montrer que $f^{p-1} \in \mathrm{Im}\left((\Phi_f)^{2p-2}\right)$.
4. Préciser l'indice de nilpotence de Φ_f, c'est-à-dire le plus petit entier q tel que $(\Phi_f)^q = 0$.

4 Mathématiques approfondies

4.1 Généralités

Exercice 22 ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent (c'est-à-dire $f \circ g = g \circ f$).

1. Montrer que $\ker(f)$ est stable par g.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g.

Exercice 23 ⋆⋆⋆

Soient E un espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que p et f commutent si et seulement si $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

4.2 Sommes directes

Exercice 24 ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que pour tout $u \notin \ker(\varphi)$, $E = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(u)$.

Exercice 25 ⋆⋆

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose que l'endomorphisme f vérifie $f^3 = f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 26 ⋆⋆⋆

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, p_i désigne un projecteur de E. On suppose que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$: $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$. Montrer que la somme $\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_n)$ est directe.

4.3 Projecteurs

Exercice 27 - Symétries ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si $f^2 = \mathrm{Id}_E$.

1. Soit p un projecteur de E.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.
   (b) Montrer que $2p - \mathrm{Id}_E$ est une symétrie.
2. On suppose dans cette question que $g \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie.
   (a) Montrer que $\frac{1}{2}(g + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur.

(b) En déduire que $\ker(g - \mathrm{Id})$ et $\ker(g + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 28 - Projecteurs associés ⋆⋆⋆

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p + q = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 29 ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + f - 6\mathrm{Id}_E = 0$. On pose alors $u = f + 3\mathrm{Id}_E$ et $v = f - 2\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que f est un isomorphisme et déterminer une expression de f^{-1} en fonction de f et Id_E.
2. Montrer qu'il existe deux suites (α_n) et (β_n) telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{Id}_E.$$
En déduire une expression de f^n en fonction de f, Id_E et n.
3. Calculer $u - v$. En déduire que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
4. Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$. En déduire que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \ker(u)$.
5. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \ker v$.

4.4 Exercices de concours

Exercice 30 - HEC 2018 (modifié) ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit φ une forme linéaire non nulle sur E.

1. Montrer que pour tout $u \notin \ker(\varphi)$, on a $E = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(u)$.
2. Soit ψ une autre forme linéaire non nulle sur E. Montrer que φ et ψ sont proportionnelles si et seulement si $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$.

Exercice 31 - QSP ESCP 2004 ⋆⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient f et g deux endomorphismes de E tels que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ et $E = \ker(f) + \ker(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 32 - Oral ESCP 2012 ⋆⋆⋆⋆⋆

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on note :
$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

1. (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
   (b) Montrer que la famille $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Soit $\pi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $\pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$.
   (a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de π.
   (c) On note :
$$F = \left\{ Q \prod_{i=1}^n (X - a_i),\ Q \in \mathbb{R}[X] \right\}.$$
   Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.
   (d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.
3. On pose :
$$\epsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_i))_{i \in [\![1,n]\!]} \end{array} \right. .$$
   (a) Montrer que ϵ est un isomorphisme.
   (b) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

   Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1, \ldots, a_n)$.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que $a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1, \ldots, a_n)$.
   (a) Soient $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction φ par :
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) - P(t) - K \prod_{i=1}^n (t - a_i) \end{array} \right. .$$
   Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.
   (b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\zeta) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a :
$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod_{i=1}^n |x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|.$$