TD A1 - Équations différentielles

1 Applications directes

Exercice 1 ⋆

Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y' = 2y$
2. $y' - 3y = 0$
3. $y' + 4y = 0$

Exercice 2 ⋆

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' - 7y = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' = 8y \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 3 ⋆

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes en utilisant une solution particulière :

1. $y' + 2y = 3$ (pas besoin d'indication),
2. $y' - y = t^2 + 1$ ($y_p(t) = at^2 + bt + c$),
3. $y' + y = te^t$ ($y_p(t) = (at + b)e^t$).

Exercice 4 ⋆

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' - 2y = 0$

Exercice 5 ⋆

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 6 ⋆

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes : (dans chaque cas, on donne une indication sur la forme de la solution particulière y_p)

1. $y'' - 3y' + 2y = 1 + t$ avec $y_p(t) = at + b$
2. $y'' - 3y' + 2y = te^t$ avec $y_p(t) = (at^2 + bt)e^t$
3. $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$ avec $y_p(t) = (at^3 + bt^2)e^{2t}$
4. $y'' - 4y' + 4y = (-1 + t)e^{-t}$ avec $y_p(t) = (at + b)e^{-t}$
5. $y'' - 2y = e^t$ avec $y_p(t) = ae^t$
6. $y'' - 2y = 1 - 2t + 3t^2$ avec $y_p(t) = at^2 + bt + c$

2 Approfondissements

Exercice 7 ⋆⋆

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

1. En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
2. En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 8 ⋆⋆

Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

$$y' = ay - aby^2 \qquad \text{(E)}$$

1. Déterminer les équilibres de l'équation logistique.
2. Soit f une solution de (E) sur $[0, +\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).
   (a) On pose $z = \frac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que,
   pour tout $t \geq 0$, $\quad z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}$.
   (b) En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \frac{f(0)}{bf(0)+(1-bf(0))e^{-at}}$.
3. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?