

TD B1 - PRODUITS SCALAIRES, ESPACES EUCLIDIENS

1 Produit scalaire

Exercice 1 - Identités de polarisation *

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).\end{aligned}$$

Exercice 2 **

La famille $(-1, 1, 1)$ et $(1, -1, 1)$ et $(1, 1, -1)$ est-elle une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique? Si non, l'orthonormaliser à l'aide du procédé de Gram-Schmidt. Donner la décomposition de $(1, 1, 1)$ dans la base obtenue.

Exercice 3 **

Montrer que définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ en posant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)dt.$$

Exercice 4 - D'après EML 2014 **

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^4 P(i)Q(i)$.

- Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.
- On considère à présent l'ensemble : $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(4) = 0\}$.
 - Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
 - Montrer que $E = \{X(X-4)Q, Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$. En déduire une base et la dimension de E .
- On définit $P_1 = (X-2)(X-3)$, $P_2 = (X-1)(X-3)$ et $P_3 = (X-1)(X-2)$ puis pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $M_i = X(X-4)P_i$.
 - Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $M_i(i) \neq 0$. On pose alors $N_i = \frac{1}{M_i(i)}M_i$.
 - Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée de E .
 - En déduire que pour $P \in E$, on a :

$$P = P(1)N_1 + P(2)N_2 + P(3)N_3.$$

Exercice 5 **

Soit E un espace euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F . On pose alors, pour tout $x \in E$, $q(x) = x - \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$.

- Montrer que q est un endomorphisme de E puis que q est un projecteur.
- Montrer que $F \subset \ker(q)$.

Exercice 6 **

Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E . Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

Indication : pour le sens réciproque, étudier $\lambda \mapsto \|x + \lambda y\|^2 - \|x\|^2$.

Exercice 7 ***

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Exercice 8 - D'après EDHEC 2011 ***

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On considère l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

- Montrer que, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est convergente.
- On définit $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. Vérifier que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
- (a) Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir :

$$\langle P', Q \rangle + \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q \rangle - P(0)Q(0).$$

- En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors on a $\|P\| = |P(0)|$.

Exercice 9

1. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 Matrices orthogonales**Exercice 10**

*

Soit \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique.

1. Montrer que la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 est orthogonale.
2. On pose :

$$e_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0\right), \quad e_2 = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right),$$

$$e_3 = \left(0, 0, \frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right), \quad e_4 = \left(0, 0, \frac{12}{5}, \frac{5}{13}\right).$$

Montrer que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthogonale de \mathbb{R}^4 .

3. Déterminer $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$.

Exercice 11

Dans cet exercice, $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$. Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si P est orthogonale, alors $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|PX\| = \|X\|$.
2. Inversement, on suppose que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \|PX\| = \|X\|$. Montrer que : $\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \langle PX, PY \rangle = \langle X, Y \rangle$. En déduire que P est orthogonale.

3 Espaces orthogonaux**Exercice 12**

**

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^2 P^{(i)}(0)Q^{(i)}(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est orthogonale. En déduire une base orthonormée.
3. Montrer que $F = \text{Vect}(1+X, X^2)$ et $G = \text{Vect}(1-X)$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 13

Soit E un espace euclidien. Soient F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux de E . Montrer que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe.

Exercice 14

On définit une application $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ en posant : $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2, \varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ alors : $\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{i,j}$. En déduire que φ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

4 Exercices de concours**Exercice 15 - QSP ESCP 2001**

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit (e_1, \dots, e_n) une famille de n vecteurs de norme 1. On suppose que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1$. Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

Exercice 16 - Oral ESCP 2016

Soit $\mu \geq 1$ et soit E un espace euclidien de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme $\|\cdot\|$.

Une famille (u_1, \dots, u_n) de vecteurs de E est dite μ -presque orthogonale si :

- pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|u_i\| = 1$
- pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \|\sum_{i=1}^n x_i u_i\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n x_i^2$.

1. Montrer qu'une famille μ -presque orthogonale est libre.
2. Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E . Montrer que (u_1, \dots, u_n) est 1-presque orthogonale si et seulement si elle est orthonormée.

Pour une des implications, on pourra considérer $u_i + u_j$ avec $i \neq j$.

3. Soit f un endomorphisme de E .
 - (a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$.
 - (b) Montrer que si f est un automorphisme de E , alors il existe un réel $\lambda \geq 1$ tel que $\forall x \in E, \frac{1}{\lambda}\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \lambda\|x\|$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit (u_1, \dots, u_n) une famille libre de vecteurs unitaires de E . Montrer l'existence d'un réel $\mu \geq 1$ tel que (u_1, \dots, u_n) soit μ -presque orthogonale.