CORRECTION DM3 - VARIABLES À DENSITÉ

Exercice 1 - ECRICOME ECE 2019 (Exercice 3)

Partie I

1. Soit $t \in \mathbb{R}$.
   - **Si** $t \geqslant 1$**,** alors $-t \leqslant -1$. Donc :
   $$f(-t) = \frac{-1}{(-t)^3} = \frac{1}{t^3} = f(t).$$
   - **Si** $t \leqslant -1$**,** alors $-t \geqslant 1$. Donc :
   $$f(-t) = \frac{1}{(-t)^3} = \frac{-1}{t^3} = f(-t).$$
   - **Si** $t \in]-1,1[$**,** alors $-t \in]-1,1[$. Donc :
   $$f(-t) = 0 = f(t).$$

   Donc $\boxed{f \text{ est bien paire.}}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente (car $3 > 1$). Donc l'intégrale est bien convergente.
   De plus, pour $A > 1$, on a :
   $$\begin{aligned} \int_1^A f(t)\mathrm{d}t &= \int_1^A \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t \\ &= \int_1^A t^{-3}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^A \\ &= \frac{1}{2} - \frac{A^{-2}}{2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
   Donc :
   $$\boxed{\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.}$$
3. (a) La fonction $t \mapsto -t$ est $\mathcal{C}^1$. Donc le changement de variable $u = -t \Leftrightarrow t = -u$ est licite.
   On a $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ puis :
   $$\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = \int_A^1 \underbrace{f(-u)}_{=f(u)}(-1)\mathrm{d}u = \int_1^A f(u)\mathrm{d}u.$$
   Ainsi on a :
   $$\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^A f(u)\mathrm{d}u \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$$
   Donc l'intégrale suivante converge et :
   $$\boxed{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.}$$

   (b) Vérifions que f est une densité :

- $\boxed{f \text{ est bien positive.}}$ C'est trivial pour $t \geqslant 1$ et $t \in]-1,1[$. Pour $t \leqslant -1$, on a $t^3 \leqslant 0$ et donc $f(t) = \frac{-1}{t^3} \geqslant 0$.
- $\boxed{f \text{ est continue sauf éventuellement en } -1 \text{ et en } 1}$ (elle est même discontinue en ces points).
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge (grâce aux calculs précédents) et vaut :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1.}$$

Donc $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

4. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

- **Si $x \leqslant -1$,** on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t.$$

Pour $A < x$, on a :

$$\int_{A}^{x} \frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-2}}{2}\right]_{A}^{x} = \frac{x^{-2}}{2} - \frac{A^{-2}}{2} \xrightarrow[A \to -\infty]{} \frac{1}{2x^2}.$$

Donc :

$$\boxed{F_X(x) = \frac{1}{2x^2}.}$$

- **Si $x \in]-1,1[$,** on a :

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} \frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} 0\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.}$$

- **Si $x \geqslant 1$,** on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{-1}^{1} 0\mathrm{d}t}_{=0} + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t.$$

Or :

$$\int_{1}^{x} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_{1}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}.$$

Donc :

$$\boxed{F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{1}{2x^2}.}$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}}$$

(b) X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument.
Découpons l'intégrale en 3 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} tf(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} tf(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\int_{-1}^{1} tf(t)\mathrm{d}t$, il n'y a donc pas de problème de convergence. De plus $f(t) = 0$ sur ce segment, donc :

$$\int_{-1}^{1} tf(t)\mathrm{d}t = 0.$$

$\int_1^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale d'une fonction positive. Sa convergence absolue est donc équivalente à sa convergence usuelle. Or :
$$\int_1^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} t\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$$
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente $(2 > 1)$. Donc $\int_1^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument.
Enfin, pour $A > 1$, en faisant le changement $u = -t$ (déjà posé rigouresuement quelques questions plus haut), on a :
$$\int_1^{A} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{-A} (-u)f(-u)(-1)\mathrm{d}u = -\int_{-A}^{-1} f(u)\mathrm{d}u.$$
Donc, en passant à la limite $A \to +\infty$, on obtient :
$$\int_1^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{-1} tf(t)\mathrm{d}t.$$
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument, donc $\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$ De plus :
$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{-1} tf(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} tf(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = -\int_{1}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t + 0 + \int_{1}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 0.}$$

(c) X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. Comme tout est positif, cela revient à la convergence usuelle.
Or :
$$\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} t^2\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
est une intégrale de Riemann divergente $(1 \leqslant 1)$. Donc $\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$

5. (a) Y est une variable aléatoire. Posons F_Y sa fonction de répartition. Pour $y \in \mathbb{R}$, on a :
$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(|X| \leqslant y).$$
Pour $y < 0$, puisque $|X| \geqslant 0$, on a :
$$F_Y(y) = 0.$$
Pour $y \geqslant 0$, on a :
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-y \leqslant X \leqslant y) \\ &= P(X \leqslant y) - P(X < -y) \\ &= P(X \leqslant y) - P(X \leqslant -y) \\ &\quad \text{(car } P(X = -y) = 0 \text{ puisque } X \text{ est à densité)} \\ &= F_X(y) - F_X(-y). \end{aligned}$$
Or $F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. Donc :
$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2(-y)^2} & \text{si } y \geqslant 1 \\ 0 - 0 & \text{si } 0 \leqslant y < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{y^2} & \text{si } y \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant y < 1 \end{cases}.$$
Et donc, en mettant tout bout à bout :
$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{y^2} & \text{si } y \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } y < 1 \end{cases}.}$$

F_Y est $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 1 par opérations sur les fonctions usuelles. Elle est donc $\mathcal{C}^0$ au moins sur le même ensemble. De plus :

$$\lim_{y\to 1^-} F_Y(y) = \underbrace{0}_{=F_Y(1)} = \lim_{y\to 1^+} F_Y(y)$$

Donc F_Y est continue en 1 également.

F_Y est donc $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un point. Donc $\boxed{Y \text{ est à densité.}}$

(b) Pour $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a :

$$F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^3} & \text{si } y > 1 \\ 0 & \text{si } y < 1 \end{cases}.$$

Donc :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est bien $\boxed{\text{une densité de } Y.}$

(c) Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\mathrm{d}x$ converge absolument. Cela revient à la convergence de $\int_1^{+\infty} x \times \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x$ vue l'expression de f_Y et comme l'intégrande est positive.

Or $\int_1^{+\infty} x \times \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x$ est à un facteur près une intégrale de Riemann convergente $(2 > 1)$. Donc Y admet une espérance.

De plus pour $A > 1$, on a :

$$\int_1^A \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^A = 2 - \frac{2}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 2.$$

Donc :

$$\boxed{E(Y) = 2.}$$

Partie II

6. (a) Comme D prend les valeurs ± 1, Z prend les valeurs 0 et 1. Puis :

$$P(Z=0) = P(D=-1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(Z=1) = P(D=1) = \frac{1}{2}.$$

On peut reconnaître deux lois différentes : $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ ou $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2]\!])$.

Dans la suite, j'utilise $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ mais on retrouve les mêmes résultats avec la loi uniforme.

On a donc : $E(Z) = \frac{1}{2}$ et $V(Z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Or $Z = \frac{D+1}{2} \Leftrightarrow D = 2Z - 1$. Donc :

$$\boxed{E(D) = 2E(Z) - 1 = 0}$$

et :

$$\boxed{V(D) = V(2Z-1) = 4V(Z) = 1.}$$

(b) Comme D et Y sont indépendantes, $T = DY$ admet une espérance et :

$$\boxed{E(T) = E(D)E(Y) = 0 \times E(Y) = 0.}$$

(c) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([D=-1],[D=1])$:

$$\begin{aligned} P(T \leqslant x) &= P([T \leqslant x] \cap [D=-1]) + P([T \leqslant x] \cap [D=1]) \\ &= P([DY \leqslant x] \cap [D=-1]) + P([DY \leqslant x] \cap [D=1]) \\ &= P([(-1)\times Y \leqslant x] \cap [D=-1]) + P([1 \times Y \leqslant x] \cap [D=1]) \\ &= P([Y \geqslant -x] \cap [D=-1]) + P([Y \leqslant x] \cap [D=1]) \\ &= P(Y \geqslant -x)P(D=-1) + P(Y \leqslant x)P(D=1) \\ &\quad \text{(par indépendance)} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}P(Y \geqslant -x) + \frac{1}{2}P(Y \leqslant x).} \end{aligned}$$

(d) Notons F_T la fonction de répartition de T. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_T(x) &= P(T \leqslant x) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \geqslant -x) + \frac{1}{2}P(Y \leqslant x) \\ &= \frac{1}{2}(1 - P(Y < -x)) + \frac{1}{2}P(Y \leqslant x) \\ &= \frac{1}{2}(1 - P(Y \leqslant -x)) + \frac{1}{2}P(Y \leqslant x) \\ &\quad \text{(car } P(Y = x) = 0 \text{ puisque } Y \text{ est à densité)} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - F_Y(-x)\right) + \frac{1}{2}F_Y(x). \end{aligned}$$

Procédons par disjonction de cas :

- **Si** $x \leqslant -1$**,** alors $-x \geqslant 1$ et $F_Y(-x) = 1 - \frac{1}{(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$. De plus $F_Y(x) = 0$. Donc :

$$F_T(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2x^2}.$$

- **Si** $x \in]-1, 1[$**,** alors $-x \in]-1, 1[$ et donc $F_Y(-x) = F_Y(x) = 0$. Donc :

$$F_T(x) = \frac{1}{2}\left(1 - 0\right) + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}.$$

- **Si** $x \geqslant 1$**,** alors $-x \leqslant -1 < 1$ et $F_Y(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. De plus $F_Y(-x) = 0$. Donc :

$$F_T(x) = \frac{1}{2}\left(1 - 0\right) + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{2x^2}.$$

En mettant tout bout à bout :

$$\boxed{F_T(x) = F_X(x).}$$

7. (a) La fonction de répartition de U est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.}$$

(b) V est une variable aléatoire. Notons F_V sa fonction de répartition. Pour $v \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_V(v) = P(V \leqslant v) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leqslant v\right).$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{1-U}} > 0$, si $v \leqslant 0$, on a :

$$F_V(v) = 0.$$

Maintenant, si $v > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P\left(1 \leqslant v\sqrt{1-U}\right) \quad (\text{car } \sqrt{1-U} > 0) \\ &= P\left(\sqrt{1-U} \geqslant \frac{1}{v}\right) \quad (\text{car } v > 0) \\ &= P\left(1 - U \geqslant \frac{1}{v^2}\right) \\ &\quad (\text{car } x \mapsto x^2 \text{ est une bijection croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ &= P\left(U \leqslant 1 - \frac{1}{v^2}\right) \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{v^2} & \text{si } 1 - \frac{1}{v^2} \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } 1 - \frac{1}{v^2} < 0 \end{cases} \\ &\quad \left(\text{le cas } 1 - \frac{1}{v^2} > 1 \text{ ne peut pas se produire}\right) \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{v^2} & \text{si } v \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } 0 < v < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

En réunissant avec le cas $v \leqslant 0$, on obtient :

$$\boxed{F_V(v) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{v^2} & \text{si } v \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } 0 < v < 1 \end{cases} = F_Y(v).}$$

Donc V et Y suivent bien la même loi.

8. (a)

```python
def D(n):
    tableau = np.ones(n)
    for i in range(n):
        if rd.random() < 1/2:
            tableau[i] = -1
    return tableau
```

(b) `c` est la multiplication de réalisations de D avec des réalisations de V qui suit la même loi que Y. Ainsi `c` contient des réalisations de la loi de X.

Pour n assez grand, l'affichage de la moyenne devrait se rapprocher de l'espérance. On devrait donc voir des valeurs proches de 0.