QUINZAINE DU 11/11 AU 22/11

Attention ! Le lundi 11/11 est férié. Contacter votre colleur pour décaler votre colle si nécessaire.

1 Contenu du cours

Chapitre 6 - Couples de v.a.r. (cours et TD)

3. Covariance et coefficient de corrélation linéaire

... Formule de $V(X+Y)$, $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$, coefficients de corrélation linéaire.

Chapitre 7 - Intégrales généralisées (cours et TD)

1. Intégration sur un segment

Théorème fondamental, primitives usuelles, rappels sur les IPP et changements de variables.

2. Intégrales impropres

Intégrale généralisée en $+\infty$, en $-\infty$, intégrale doublement généralisée, intégrales de référence (Riemann et exponentielle), règles de calculs (linéarité, positivité, croissance, théorème de l'intégrale nulle).

3. Intégrales de fonctions positives

Critères de comparaisons.

4. Convergence absolue

Définitions et applications.

5. IPP et changements de variables

IPP, Changement de variables (on revient sur un segment à chaque fois), applicatios aux fonctions paires et impaires.

6. Compléments : maths approfondies

Intégrales généralisées sur un intervalle quelconques, intégrales de référence, théorème de changement de variables pour les intégrales généralisées, fonction Γ.

Chapitre 8 - Suites de v.a.r. - partie 1 (cours, tout début des exercices)

1. Généralités sur les v.a.r.d.

Définition de vecteurs aléatoires, loi conjointe, lois marginales pour un vecteur discret, $g(X_1, ..., X_n)$ est une v.a.r.d. si $(X_1, ..., X_n)$ est un vecteur aléatoire discret.

2. Indépendance

Indépendance mutuelle et deux à deux pour n v.a.r.d, définition pour une suite infinie, lemme des coalitions.

3. Espérance et variance

Linéarité de l'espérance, variance d'une somme de v.a.r.d. mutuellement indépendantes.

Chapitre 9 - Variables aléatoires à densité (cours uniquement)

1. Généralités sur les variables à densité

Définition, densité d'une v.a.r. à densité, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$, caractérisation des fonctions de répartition à densité, caractérisation des densités, régularité des fonctions de répartition, formules pour $P(a \leqslant X \leqslant b)$, cas particulier $P(X = a)$.

2. Lois usuelles

Densité et fonctions de répartitions de : loi uniforme (cas sur $[0,1]$ vu en particulier), loi exponentielle et loi normale (cas centrée réduite vu en particulier), propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle, formule $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour la loi normale, stabilité par somme de la loi normale.

3. Fonctions d'une variables aléatoires

Transformations affines sur des exemples, transformations affines de lois uniformes et de lois normales, transformations quelconques.

2 Questions pour commencer

1. **Démonstration :** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 1$.
2. Calculer à l'aide d'une intégration par partie $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
3. Calculer à l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{t}$, $\int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}}\mathrm{d}t$.
4. Illustrer par un contre-exemple que l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle pour un vecteur aléatoire.
5. Justifier que $x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.
6. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que $Y = 2X + 3$ est à densité et en déterminer une densité.

3 Maths Approfondies

Chapitre 4 - Séries (cours et TD)

5. Compléments : maths approfondies

Ensembles dénombrables, familles sommables (théorème de Fubini), séries doubles.
Remarque : les familles sommables ne sont pas au cœur du programme et sont surtout utiles pour les probabilités. On évitera de poser des exercices uniquement sur ce point.

Chapitre 5 - Variables aléatoires discrètes (cours et TD)

4. Compléments : maths approfondies

Espérance conditionnelle, formule de l'espérance totale.

Chapitre B1 - Produits scalaires, espaces euclidiens (cours uniquement)

1. Produits scalaires

Forme bilinéaire, forme bilinéaire symétrique, quelques conséquences des règles de calculs, produits scalaires, exemples : produits usuelles sur $\mathbb{R}^n$, puis sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.