DS3 Appli - Algèbre linéaire, v.a.r. à densité

Samedi 23/11/2024 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Changez de copie** à chaque nouvel exercice.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques `Python` *sont importées comme suit :*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1 - EDHEC Appliquées 2023 (Exercice 2)

1. Donner un exemple, d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élement de $]0,1[$ tel que pour tout couple (x,y) de réels, on ait :

$$|f(x)-f(y)| \leqslant K \times |x-y|. \quad (\star)$$

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente.
On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. À l'aide de la relation $(\star)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x)=x$ admet au plus une solution.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$|u_{n+1}-u_n| \leqslant K^n|u_1-u_0|.$$
   (b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1}-u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.
   (c) Conclure que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution.
5. On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p\geqslant 1$).
   (a) Justifier que l'on a : $\sum_{i=n}^{n+p-1}|u_{i+1}-u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1}K^i|u_1-u_0|$.
   (b) En déduire l'inégalité :
   $$|u_{n+p}-u_n| \leqslant K^n \times \frac{1-K^p}{1-K}|u_1-u_0|.$$
   (c) Établir enfin l'inégalité suivante :
   $$|a-u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times |u_1-u_0|.$$
6. **Étude d'un exemple :** on considère la fonction f définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}.$$

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$, pour tout réel t.

(b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \left|f'(t)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

(c) En déduire que f est $\frac{1}{4}$-contractante.

(d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

(e) Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n, la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```python
def suite(n):
    u = ...
    for k in range(1,n+1):
        u = ...
    return u
```

(f) En s'appuyant sur le résultat de la question 5c, établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant 2000/3$.

(g) En déduire un programme Python, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Exercice 2 - EDHEC ECE 2016 (Exercice 1 - très largement adapté)

Dans cet exercice, on note I la matrice identité de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On considère alors la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. Soit $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $AX = \lambda X$ alors nécessairement $\lambda = 2$.
3. Justifier que $E_2(A) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \ AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(A)$. Quelle est la dimension de $E_2(A)$?
4. (a) On note (u_1, u_2) la base trouvée à la question précédente. On pose $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer P la matrice de passage de la base canonique de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans la base (u_1, u_2, u_3). Puis calculer $T = P^{-1}AP$. Vérifier que T est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous 2.

   (c) On note $T = 2I + N$. Vérifier que $N^2 = 0$ et que I et N commutent.

   (d) En utilisant la formule du binôme de Newton, exprimer T^n comme une combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.
5. (a) Expliquer pourquoi l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I.$$

   (b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la question 1 pour déterminer A^{-1} en fonction de A et de I.

   (c) Vérifier que la formule proposée à la question 5a reste valable pour $n = -1$.

Exercice 3 - EDHEC ECE 2017 (Exercice 3 - adapté)

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln V$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit la loi de Gumbel.

1. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.
   (b) En déduire que W est une variable à densité.

On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est-à-dire la loi $\mathcal{E}(1)$.

On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. (a) Montrer que la fonction de répartition de F_{Y_n} de Y_n est définie par :
$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$
   (b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.
3. (a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinge de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Établir l'égalité suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t = x\,(1 - F_{Y_n}(t)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\mathrm{d}t.$$
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(t)) = 0$.
   (d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité : $E(Y_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t$.
4. (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u}\mathrm{d}u.$$
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-x})^k}{k}$, puis donner $E(Y_n)$ sous forme de somme.
5. On pose $Z_n = Y_n - \ln n$.
   (a) On rappelle que `rd.exponential(1, n)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
   Compléter la déclaration de fonction `Python` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n :

```python
def f(n):
    x = rd.exponential(1,n)
    Z = ...
    return Z
```

   (b) Voici deux scripts :

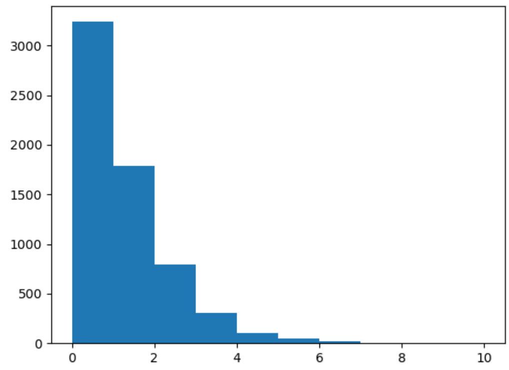
```python
V = rd.exponential(1,10000)
W = -np.log(V)
s = np.linspace(0,10,11)
plt.hist(W,s)
plt.show()
```

Script (1)

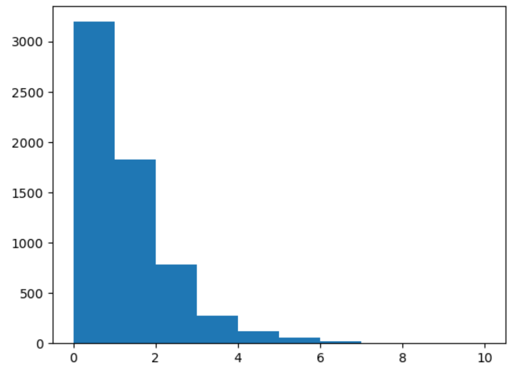
```python
n = int(input("Entrez la valeur de n:"))
Z = []
for k in range(10000):
    Z = Z.append(f(n))
s = np.linspace(0,10,11)
plt.hist(W,s)
plt.show()
```

Script (2)

Chacun de ces scripts 10 000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, $\dots$, $]9,10]$, et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par W), renvoir l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Z_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant à la fonction de répartition de Z_n lorsque $n \to +\infty$?

6. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.
   (a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)$.
   (b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.
   (c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.
   (d) Démontrer le résultat conjecturé à la question 5b.

Problème 4 - EDHEC Appliquées 2023 (Problème)

Partie I - Propriété d'une loi de probabilité.
On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit une loi de Pareto de paramètre c.

2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.
3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.
   (a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $P_{[X>t]}(X \leqslant tx)$.
   (b) En déduire que la loi de $\frac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $[X > t]$, est la loi de X.

Partie II - Réciproque de la propriété précédente.
On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$.
On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Pour toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $P(Y > t) > 0$.
- La loi de $\frac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$, est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

5. (a) Établir l'égalité :
$$\forall x \geqslant 1,\ \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}.$$
   (b) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que :
$$\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}.$$
   (c) Montrer enfin la relation :
$$\forall t > 1,\ G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1.$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$.
On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 1$.

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

   (a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1, +\infty[$.
   (b) En notant K la constante évoquée à la question 6a, donner toutes les solutions de (E_1).
   (c) Trouver une fonction u, constante sur $]1, +\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).
   (d) Montrer l'équivalence : h solution de $(E_2) \Leftrightarrow h - u$ solution de (E_1).
   (e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :
$$\forall t > 1,\ h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}.$$

7. (a) Montrer finalement que l'on a :
$$\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.$$
   (b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie III - Simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.
   (a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.
   (b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.