DS3 Appli - Algèbre linéaire, v.a.r. à densité

Exercice 1 - EDHEC Appliquées 2023 (Exercice 2)

1. La fonction nulle est un tel exemple avec K quelconque.
Sinon, on peut simplement poser :
$$f(x) = Kx.$$
On a alors :
$$\boxed{|f(x) - f(y)| = |Kx - Ky| = |K(x-y)| = K|x-y| \leqslant K|x-y|.}$$

2. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Quand y tend vers x, on a alors $|x-y| \xrightarrow[y \to x]{} 0$. Donc, par encadrement :
$$\lim_{y \to x} |f(x) - f(y)| = 0.$$
On peut encore l'écrire :
$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x).$$
Donc f est continue en x. Et comme cela est valide pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = y$. On suppose $x \neq y$. Montrons qu'il y a une absurdité.
On applique $(\star)$. On a donc :
$$|\underbrace{f(x)}_{=x} - \underbrace{f(y)}_{=y}| \leqslant K|x-y|.$$
D'où :
$$0 \leqslant (K-1)|x-y|.$$
Or $K - 1 < 0$ puisque $K < 1$. Donc $|x-y| \leqslant 0$. Et comme la valeur absolue est positive, cela implique $|x-y| = 0$ puis $x = y$. $\boxed{\text{C'est absurde.}}$
Donc il y a au plus une solution à $f(x) = x$.

4. (a) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
   - **Initialisation :** pour $n = 0$, on a :
   $$K^0|u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| \geqslant |u_{0+1} - u_0|.$$
   Donc la propriété est initialisée.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n|u_1 - u_0|$.
   D'après $(\star)$, on a :
   $$|\underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} - \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}}| \leqslant K \underbrace{|u_{n+1} - u_n|}_{\leqslant K^n|u_1 - u_0|}.$$
   Donc :
   $$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant K^{n+1}|u_1 - u_0|.$$
   Donc la propriété est héréditaire.

   Ainsi, par principe de récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\boxed{|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n|u_1 - u_0|.}$$

   (b) Considérons la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n)$. Montrons qu'elle converge absolument.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$0 \leqslant |u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n|u_1 - u_0|.$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} K^n|u_1-u_0|$ est une série géométrique convergente (puisque $K\in]0,1[$). Donc par critère de comparaison du théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n+1}-u_n|$ converge.

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) \text{ converge absolument donc converge.}}$

Maintenant, pour $N\in\mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N-1}(u_{n+1}-u_n)=u_N-u_0$$

par télescopage et donc $(u_n)_n$ converge si et seulement si la suite $(\sum_{n=0}^{N-1}(u_{n+1}-u_n))_N$ converge c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$

(c) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue en a. Donc comme (u_n) vérifie $u_{n+1}=f(u_n)$, d'après le théorème du point fixe, on a :

$$\boxed{f(a)=a.}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un point fixe.}}$ D'après la question 3, il y a au plus une solution à $f(x)=x$.

Donc $\boxed{f(x)=x \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}.}$

5. (a) Pour tout $i\in[\![n,n+p-1]\!]$, on a :

$$|u_{i+1}-u_i|\leqslant K^i|u_1-u_0|.$$

Par sommation, on obtient :

$$\boxed{\sum_{i=n}^{n+p-1}|u_{i+1}-u_i|\leqslant\sum_{i=n}^{n+p-1}K^i|u_1-u_0|.}$$

(b) D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{n+p-1}K^i|u_1-u_0| &= |u_1-u_0|\sum_{i=n}^{n+p-1}K^i\\ &= |u_1-u_0|K^n\frac{1-K^p}{1-K} \text{ (somme des termes d'une suite géométrique)}\end{aligned}$$

D'autre part, on a par inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p-1}(u_{i+1}-u_i)\right|\leqslant\sum_{i=n}^{n+p-1}|u_{i+1}-u_i|.$$

Donc :

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p-1}(u_{i+1}-u_i)\right|\leqslant|u_1-u_0|K^n\frac{1-K^p}{1-K}.$$

Or par télescopage, on a :

$$\sum_{i=n}^{n+p-1}(u_{i+1}-u_i)=u_{n+p}-u_n.$$

Ainsi :

$$\boxed{|u_{n+p}-u_n|\leqslant K^n\times\frac{1-K^p}{1-K}|u_1-u_0|.}$$

(c) On choisit n fixé. On passe alors à la limite $p\to+\infty$ dans l'inégalité précédente. On obtient, puisque $K\in]0,1[$:

$$\boxed{|a-u_n|\leqslant\frac{K^n}{1-K}|u_1-u_0|.}$$

6. (a) f est $\mathcal{C}^2$ sir $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles car $1+e^t$ ne s'annule jamais.
On a de plus pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f'(t) = -\frac{e^t}{(1+e^t)^2}}$$

et :

$$\boxed{f''(t) = -\frac{e^t(1+e^t)^2 - e^t 2e^t(1+e^t)}{(1+e^t)^4} = \frac{2e^{2t} - e^t - e^{2t}}{(1+e^t)^3} = \frac{e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3}.}$$

(b) $f''(t)$ est du signe de $e^t - 1$. Or :

$$e^t - 1 > 0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow t > 0.$$

De plus :

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^t		$-$	0	$+$	
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$f'(0) = -\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

On en déduit :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \left|f'(t)\right| \leqslant \frac{1}{4}.}$$

(c) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on en déduit avec l'inégalité des accroissements finis que :

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4}|x-y|}$$

puisque $|f'|$ est majoré par $\frac{1}{4}$.
Donc $\boxed{f \text{ est bien } \frac{1}{4}\text{-contractante.}}$

(d) Comme f est $\frac{1}{4}$-contractante, d'après la question 4, la suite (u_n) converge vers un point fixe de f.

(e)

```python
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1,n+1):
        u = 1/(1+np.exp(u))
    return u
```

(f) Si $4^n \geqslant 2000/3$ alors :

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4^n} \leqslant \frac{4}{3} \times \frac{3}{2000} \leqslant \frac{1}{500}.$$

De plus $u_1 = \frac{1}{1+e^{u_0}} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$. Donc :

$$|u_1 - u_0| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}.$$

D'après la question 5, on en déduit que pour $4^n \geqslant 2000/3$, on a :

$$\boxed{|a - u_n| \leqslant \underbrace{\frac{1}{1000}}_{=10^{-3}}.}$$

(g)

```
n = int(np.log(2000/3)/np.log(4)) + 1
print(suite(n))
```

Exercice 2 - EDHEC ECE 2016 (Exercice 1 - très largement adapté)

1. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I.}$$

Ainsi, on peut écrire $A^2 - 4A + 4I = 0$ et donc $\boxed{x^2 - 4x + 4 \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

2. Soit $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose $AX = \lambda X$. Montrons que $\lambda = 2$.
Calculons :

$$(A^2 - 4A + 4I)X = A(AX) - 4(AX) + 4X = A(\lambda X) - 4\lambda X + 4X = \lambda AX - 4\lambda X + 4X = \lambda^2 X - 4\lambda X + 4X.$$

Or $A^2 - 4A + 4I = 0$. Donc $(A^2 - 4A + 4I)X = 0$ et ainsi :

$$\underbrace{\lambda^2 X - 4\lambda X + 4X}_{=(\lambda-2)^2 X} = 0.$$

Comme $X \neq 0$, cela implique $(\lambda - 2)^2 = 0$ c'est-à-dire $\boxed{\lambda = 2.}$

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_2(A) &\Leftrightarrow AX = 2X \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2x + 2z = 2y \\ x - y + 3z = 2z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x - y + z = 0 \\
&\Leftrightarrow y = x + z \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est bien un espace vectoriel}}$ (c'est le sous-espace de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$). De plus, $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ en est une famille génératrice. Comme c'est une famille de deux éléments non colinéaires, cette famille est libre. Donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_2(A)}$ qui est donc de $\boxed{\text{dimension 2.}}$

4. (a) Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
On a donc :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On en déduit le système :

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 &=& 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0\\ \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. \\ \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 - L_3}{\Leftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 &=& 0\\ -\lambda_3 &=& 0\\ \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& 0\\ \lambda_3 &=& 0\\ \lambda_2 &=& 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Donc, on a bien $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0}$ et donc la famille est libre.
De plus, comme (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de cardinal 3 dans un espace de dimension 3 ($\dim \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$), c'est une famille génératrice et donc une $\boxed{\text{base de } \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

(b) On a :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.}$$

On sait que P est inversible puisque c'est une matrice de passage. Calculons P^{-1}.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \\ \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.}$$

Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned} T &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.} \end{aligned}$$

T est bien triangulaire et ses éléments diagonaux sont bien égaux à 2.

(c) Comme on note $T = 2I + N$, on a $N = T - 2I$. Donc :

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Et :

$$IN = N = NI.$$

Donc N et I commutent.

(d) Comme N et I commutent, la formule du binôme de Newton s'applique. On a :

$$(2I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} N^k.$$

Or $N^2 = 0$. Donc par récurrence immédiate, pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.
Si $n \geqslant 1$, on a donc :

$$\boxed{(2I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} \underbrace{N^k}_{=0 \text{ si } k \geqslant 2} = \binom{n}{0} (2I)^n N^0 + \binom{n}{1} (2I)^{n-1} N^1 = 2^n I + n2^{n-1} N.}$$

On constate que l'expression reste valable pour $n = 0$. On peut ensuite écrire :

$$\boxed{(2I + N)^n = 2^n I + n2^{n-1} N = 2^n I + n2^{n-1}(T - 2I) = n2^{n-1} T - 2^n (n-1) I.}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} A^n &= (PTP^{-1})^n = \underbrace{PTP^{-1} \times PTP^{-1} \times \cdots \times PTP^{-1}}_{n \text{ fois}} \\ &= PT^n P^{-1} = P(n2^{n-1}T - 2^n(n-1)I)P^{-1} \\ &= n2^{n-1} PTP^{-1} - 2^n(n-1) PIP^{-1} \\ &= \boxed{n2^{n-1} A - 2^n (n-1) I.} \end{aligned}$$

(b) On a $A^2 - 4A + 4I = 0$. Donc :

$$A(A - 4I) = -4I$$

et ainsi :

$$A\left(-\frac{1}{4}(A-4I)\right)=I.$$

On vérifie aisément que de même :

$$\left(-\frac{1}{4}(A-4I)\right)A=I.$$

Donc A est inversible et :

$$\boxed{A^{-1}=-\frac{1}{4}(A-4I).}$$

(c) On met dans la formule $n=-1$ et on obtient :

$$\begin{aligned} n2^{n-1}A-2^n(n-1)I &= (-1)2^{-2}A-2^{-1}(-1-1)I \\ &= -\frac{1}{4}A+I=-\frac{1}{4}(A-4I)\boxed{=A^{-1}.} \end{aligned}$$

Donc la formule reste bien valable pour $n=-1$.

Exercice 3 - EDHEC ECE 2017 (Exercice 3 - adapté)

1. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_W(x) &= P(W\leqslant x) \\ &= P(-\ln(V)\leqslant x) \\ &= P(\ln(V)\geqslant -x) \\ &= P(V\geqslant \mathrm{e}^{-x}) \\ &\quad \text{car exp est une bijection strictement croissante} \\ &= 1-P(V<\mathrm{e}^{-x}) \\ &= 1-P(V\leqslant \mathrm{e}^{-x}) \\ &\quad \text{car } V \text{ est à densité et donc } P(V=\mathrm{e}^{-x})=0 \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^{-x}>0$. Donc en utilisant l'expression de F_V, on obtient :

$$\boxed{F_W(x)=1-\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.}$$

(b) F_W est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles. Elle est même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ entier pour la même raison.

Donc $\boxed{W \text{ est bien une variable à densité.}}$

2. (a) Y_n est une variable aléatoire. On a pour $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= P(Y_n\leqslant x) \\ &= P(\max(X_1,\ldots,X_n)\leqslant x) \\ &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k\leqslant x]\right) \\ &\quad \text{car le maximum est inférieur à } x \text{ si et seulement si tous les } X_k \text{ sont inférieurs à } X \\ &= \prod_{k=1}^{n}P(X_k\leqslant x) \\ &\quad \text{par indépendance mutuelle des } X_k \\ &= P(X_1\leqslant x)^n \\ &\quad \text{car les } X_k \text{ suivent tous la même loi} \\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ (1-\mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}} \\ &\quad \text{en utilisant la fonction de répartition de la loi } \mathcal{E}(1) \end{aligned}$$

(b) F_{Y_n} est $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en 0. On a pour $x \in \mathbb{R}^\star$:

$$F'_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Donc :

$$\boxed{f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

est une densité de Y_n puisque la valeur en 0 est arbitraire (du moment qu'elle est positive).

3. (a) On a pour $t > 0$:

$$1 - F_{Y_n}(t) = 1 - (1-\mathrm{e}^{-t})^n.$$

Quand $t \to +\infty$, $e^{-t} \to 0$. Donc on peut utiliser le développement limité $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u)$ quand $u \to 0$. On a :

$$\boxed{1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{=} 1 - (1 - n\mathrm{e}^{-t} + o(\mathrm{e}^{-t})) = n\mathrm{e}^{-t} + o(\mathrm{e}^{-t}) \underset{t\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-t}.}$$

Comme $F_{Y_n}(t)$ est une probabilité, on a $F_{Y_n}(t) \leqslant 1$ et donc $1 - F_{Y_n}(t) \geqslant 0$. On a évidemment $n\mathrm{e}^{-t} > 0$. Donc par critère d'équivalence, les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

ont même nature. Or $\int_0^{+\infty} n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente puisque l'exposant est négatif.

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

(b) On pose $u(t) = 1 - (1-\mathrm{e}^{-t})^n$ et $v(t) = t$. u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc on peut faire une intégration par parties. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t &= \int_0^x \underbrace{(1-(1-\mathrm{e}^{-t})^n)}_{=u(t)} \times \underbrace{1}_{=v'(t)} \mathrm{d}t \\
&= \left[\underbrace{(1-(1-\mathrm{e}^{-t})^n)}_{=u(t)} \times \underbrace{t}_{=v(t)}\right]_0^x - \int_0^x \underbrace{(-n\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{t})^{n-1})}_{=u'(t)} \times \underbrace{t}_{=v(t)} \mathrm{d}t \\
&= x(1-(1-\mathrm{e}^{-x})) + \int_0^x tn\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{t})^{n-1}\mathrm{d}t \\
&= \boxed{x(1-F_{Y_n}(x)) + \int_0^x tf_{Y_n}(t)\mathrm{d}t.}
\end{aligned}$$

(c) On a pour $x > 0$:

$$x(1 - F_{Y_n}(x)) = x(1-(1-\mathrm{e}^{-x})^n).$$

Encore une fois, on a $\mathrm{e}^{-x} \to 0$. Donc :

$$x(1-F_{Y_n}(x)) \underset{x\to+\infty}{=} x(1-(1-n\mathrm{e}^{-x} + o(\mathrm{e}^{-x}))) = nx\mathrm{e}^{-x} + o(x\mathrm{e}^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} nx\mathrm{e}{-x}.$$

Or par croissance comparée, on a $x\mathrm{e}^{-x} \to 0$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(t)) = 0.}$$

(d) On en déduit que :

$$\int_0^x tf_{Y_n}(t) = \underbrace{\int_0^x (1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty}(1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t} - \underbrace{x(1-F_{Y_n}(x))}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} (1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t.$$

Donc $\int_0^{+\infty} tf_{Y_n}(t)$ converge et vaut $\int_0^{+\infty}(1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t$. De plus, on a :

$$\int_{-\infty}^{0} tf_{Y_n}(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} t \times 0\mathrm{d}t = 0.$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf_{Y_n}(t) = \int_0^{+\infty}(1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t.$$

Donc Y_n admet une espérance et :

$$\boxed{E(Y_n) = \int_0^{+\infty}(1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t.}$$

4. (a) La fonction $\varphi : t \mapsto 1-\mathrm{e}^{-t}$ est $\mathcal{C}^1$ donc le changement est licite.
On a $u = 1-\mathrm{e}^{-t} \Leftrightarrow t = -\ln(1-u)$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1-u}$. Donc pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\int_0^x (1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t = \int_0^x (1-(1-\mathrm{e}^{-t})^n)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{1-u^n}{1-u}\mathrm{d}u = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\mathrm{d}u.}$$

(b) On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u^k = \frac{1-u^n}{1-u}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^x (1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t &= \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\mathrm{d}u = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k\right)\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} u^k \mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{k+1}}{k+1} = \boxed{\sum_{k'=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{k'}}{k'}} \\ &\text{en posant } k' = k+1\end{aligned}$$

En passant à la limite $x \to +\infty$ (ce qui est possible car c'est une somme finie), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} (1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Donc :

$$\boxed{E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

5. (a)

```
def f(n):
    x = rd.exponential(1,n)
    Z = np.max(x)
    return Z
```

Remarque : `np.max` me semble vraiment ce qui est attendu par le sujet. Mais nous n'avons pas bien eu le temps d'en reparler cette année. On pouvait sinon bricoler la solution suivante mais ça demande de modifier la structure du code :

```python
def f(n):
    Z = 0
    for i in range(n):
        x = rd.exponential(1)
        if x > Z:
            Z = x
    return Z
```

(b) Il semble que la fonction de répartition de Z_n tendent en un sens à préciser vers celle de la loi de Gumbel lorsque $n \to +\infty$.
Plus précisément, il semble que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x).$$

6. (a) Z_n est une variable aléatoire. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= P(Z_n \leqslant x) \\ &= P(Y_n - \ln(n) \leqslant x) \\ &= P(Y_n \leqslant x + \ln(n)) \\ &= \boxed{F_{Y_n}(x + \ln(n)).} \end{aligned}$$

(b) On a donc pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x + \ln(n) < 0 \\ 1 - (1 - \mathrm{e}^{-(x+\ln(n))})^n & \text{si } x + \ln(n) \geqslant 0 \end{cases} \\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ 1 - \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases}.} \end{aligned}$$

(c) On a $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc on peut utiliser l'équivalent :

$$\ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}.$$

Donc :

$$n\ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\mathrm{e}^{-x}.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}.}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour n suffisamment grand, on a $x \geqslant -\ln(n)$. Donc pour n suffisamment grand, on a :

$$F_{Z_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n.$$

Or :

$$\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right).$$

Donc comme exp est continue :

$$\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} = F_W(x).}$$

Problème 4 - EDHEC Appliquées 2023 (Problème)

Partie I - Propriété d'une loi de probabilité.

1. Vérifions que f est une densité :
   - f est continue sur $]-\infty, 1[$ et est continue sur $]1, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles. Donc $\boxed{f \text{ est continue sauf éventuellement en } 1.}$
   - $\boxed{f \text{ est bien positive sur } \mathbb{R}.}$
   - On a :
   $$\int_{-\infty}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\mathrm{d}x = 0.$$
   Puis $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge car c'est une intégrale de Riemann avec $1+c > 1$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge. De plus, pour $A > 1$, on a :
   $$\int_1^A f(x)\mathrm{d}x = \int_1^A \frac{c}{x^{1+c}}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^c}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^c} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$
   Donc $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ puis :
   $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.}$$

   Donc f est bien une densité de probabilité.
2. Comme X a pour densité f, on a :
   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$
   Distinguons deux cas :
   - Si $x < 1$, on a :
   $$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0.}$$
   - Si $x \geqslant 1$, on a :
   $$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(t)}_{=0 \text{ si } t<1} \mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \frac{c}{t^{1+c}}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{t^c}\right]_1^x \\ &= \boxed{1 - \frac{1}{t^c}.} \end{aligned}$$

   Donc :
   $$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{t^c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$
3. (a) Comme le suggère l'énoncé, distinguons les deux cas suivants :
   - **Si $x < 1$:**
   On a alors :
   $$P_{[X>t]}(X \leqslant tx) = \frac{P([X > t] \cap [X \leqslant tx])}{P(X > t)}.$$

Or si $x < 1$, en multipliant par t (positif), on a $tx < t$. Donc $X \leqslant tx$ implique $X < t$ et donc :

$$[X > t] \cap [X \leqslant tx] = \varnothing.$$

Donc :

$$\boxed{P_{[X>t]}(X \leqslant tx) = 0.}$$

- **Si $x \geqslant 1$:**
  On a encore :
  $$P_{[X>t]}(X \leqslant tx) = \frac{P([X > t] \cap [X \leqslant tx])}{P(X > t)}.$$
  Or on a :
  $$P([X > t] \cap [X \leqslant tx]) = P(t < X \leqslant tx) = F(tx) - F(t)$$
  car $tx \geqslant t$ si $x \geqslant 1$. Donc :
  $$P([X > t] \cap [X \leqslant tx]) = \left(1 - \frac{1}{(tx)^c}\right) - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right) = \frac{1}{t^c} - \frac{1}{(tx)^c}.$$
  De même, on a :
  $$P(X > t) = 1 - F(t) = 1 - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right) = \frac{1}{t^c}.$$
  Ainsi :
  $$\boxed{P_{[X>t]}(X \leqslant tx) = \frac{\frac{1}{t^c} - \frac{1}{(tx)^c}}{\frac{1}{t^c}} = 1 - \frac{1}{x^c}.}$$

(b) On trouve ainsi que dans tous les cas :

$$P_{[X>t]}(X \leqslant tx) = F(x).$$

Donc :

$$\boxed{P_{[X>t]}\left(\frac{X}{t} \leqslant x\right) = F(x).}$$

Et ainsi $\boxed{\frac{X}{t}\text{, conditionnellement à } [X > t]\text{, suit la même loi que } X.}$

Partie II - Réciproque de la propriété précédente.

4. On a $G(1) = \int_{-\infty}^{1} g(t)\mathrm{d}t$. Or g est nulle sur $]-\infty, 1[$. Donc : $\boxed{G(1) = 0.}$

5. (a) Soit $x \geqslant 1$, soit $t > 1$. Le calcul est similaire à celui de la partie précédente. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)} &= \frac{P(Y \leqslant tx) - P(Y \leqslant t)}{1 - P(Y \leqslant t)} \\
&= \frac{P(t < Y \leqslant tx)}{P(Y > t)} \\
&= \frac{P([t < Y] \cap [Y \leqslant tx])}{P(Y > t)} \\
&= P_{[Y>t]}(Y \leqslant tx) \\
&= P_{[Y>t]}\left(\frac{Y}{t} \leqslant x\right) \\
&= P(Y \leqslant t) \text{ par hypothèse} \\
&= \boxed{G(t).}
\end{aligned}$$

(b) Comme g est continue sur $]1, +\infty[$, G est bien $\mathcal{C}^1$ sur le même domaine.
Puis, avec t fixé, en dérivant la relation précédente pour $x > 1$, on obtient :

$$\boxed{G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}.}$$

(c) Comme g est continue sur $]1,+\infty[$, on a $G'(x) = g(x)$ pour tout $x \in]1,+\infty[$. Donc :

$$g(x) = \frac{tG'(tx)}{1-G(t)}.$$

On prend alors la limite $x \to 1$. Comme g est continue en 1, et comme G' est continue en $t \in]1,+\infty[$, on a :

$$\underbrace{g(1)}_{=c} = \frac{tG'(t)}{1-G(1)}.$$

Comme $G(1) = 0$, on en déduit après modifications cosmétiques :

$$\boxed{G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1.}$$

6. (a) Soit y selon les conditions de l'énoncé. On a :

$$\forall t > 1, z'(t) = ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t).$$

Cela nous pousse à étudier les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall t > 1,\ y(t) + \frac{t}{c}y'(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t > 1,\ ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = 0 \text{ en multipliant par } ct^{c-1} \\ &\Leftrightarrow \forall t > 1,\ z'(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{z \text{ est constante sur }]1,+\infty[.} \end{aligned}$$

(b) Ainsi, y est solution si et seulement si $t^c y(t) = K$. On en déduit que les solutions de (E_1) sont les fonctions :

$$\boxed{\{t \mapsto \frac{K}{t^c},\ K \in \mathbb{R}\}.}$$

(c) Soit u une fonction constante. On a :

$$\begin{aligned} u \text{ solution de } (E_2) &\Leftrightarrow \forall t > 1,\ u(t) + \frac{t}{c}u'(t) = 1 \\ &\Leftrightarrow u(t) = 1. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{u = 1 \text{ est bien solution de } (E_2).}$

(d) Soit h une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_2) &\Leftrightarrow \forall t > 1,\ h(t) + \frac{t}{c}h'(t) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall t > 1,\ h(t) + \frac{t}{c}h'(t) = u(t) + \frac{t}{c}u'(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t > 1,\ (h-u)(t) + \frac{t}{c}(h-u)'(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{h - u \text{ solution de } (E_1).} \end{aligned}$$

(e) Soit h une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_2) &\Leftrightarrow h - u \text{ solution de } (E_1) \\ &\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R},\ \forall t > 1,\ h(t) - u(t) = \frac{K}{t^c} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\exists K \in \mathbb{R},\ \forall t > 1,\ h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}.} \end{aligned}$$

7. (a) D'après tout ce qui précède, on a :

$$\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{K}{t^c}$$

avec $K \in \mathbb{R}$.
De plus, $G(1) = 0$. Donc en prenant la limite $t \to 1$ dans l'égalité précédente (G est continue) :

$$0 = 1 - \frac{K}{1^c} = 1 - K.$$

D'où $K = 1$ et :

$$\boxed{\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.}$$

(b) Pour $t = 1$, $\boxed{\text{on a } 1 - \frac{1}{1^c} = 0 \text{ qui est bien égal à } G(1) = 0.}$
Comme G est croissante et minorée par 0, on a $G(t) = 0$ pour $t < 1$.
Donc pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{t^c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

Y suit donc une loi de Pareto de paramètre c.

Partie III - Simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} H(x) &= P(Z \leqslant x) \\ &= P(\ln(X) \leqslant x) \\ &= P(X \leqslant \mathrm{e}^x) \\ &\quad \text{car exp est une bijection strictement croissante} \\ &= \boxed{F(\mathrm{e}^x).} \end{aligned}$$

(b) On a donc pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{e}^x < 1 \\ 1 - \frac{1}{(\mathrm{e}^x)^c} & \text{si } \mathrm{e}^x \geqslant 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(c)$.
Donc $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{E}(c).}$

(c) On peut inverser la formule $X = \exp(Z)$ et donc simuler X à partir de Z.

```python
def simulX(c):
    # Numpy a la convention américaine plutôt que française
    # pour le paramètre. C'est pourquoi on met 1/c
    Z = rd.exponential(1/c)
    X = np.exp(Z)
    return X
```