DS 3 Appro - Algèbre linéaire, v.a.r. à densité

Samedi 23/11/2024 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Changez de copie** à chaque nouvel exercice.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques `Python` *sont importées comme suit :*

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2022 (Problème - extrait)

On considère un réel μ et un réel strictement positif a, et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$F_{\mu,a} : x \mapsto \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right).$$

1. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.
   (a) Justifier que $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée notée $f_{\mu,a}$ et sa dérivée seconde $f'_{\mu,a}$.
   (b) En déduire les variations et la convexité de $F_{\mu,a}$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de $F_{\mu,a}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Donner l'allure de la courbe de $F_{\mu,a}$ en y faisant figurer le point d'inflexion.
   (c) Montrer que $F_{\mu,a}$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.
   On note G la réciproque de $F_{0,1}$. Expliciter G.
2. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.
   Montrer que $f_{\mu,a}$ est une densité, et que $F_{\mu,a}$ est la fonction de répartition associée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans la suite du problème sont définies sur cet espace probabilisé.
Soient μ et a des réels tels que $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X **suit la loi de Gumbel de paramètre** (μ, a), ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a)$, si elle admet $f_{\mu,a}$ comme densité.

3. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
   Soit μ un réel et a un réel strictement positif.
   Montrer que la variable aléatoire $X = aZ + \mu$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a).

On **admet** que réciproquement, si X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a), alors $Z = \frac{X-\mu}{a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

4. (a) Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme $]0, 1[$.
   Montrer que la variable alélaoire $Y = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
   (b) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def gumbel(mu,a):` renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(\mu, a)$.
5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) et $Z = \frac{X-\mu}{a}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ converge.

(b) À l'aide du changement de variable $t = e^{-u}$, montrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(-\ln(t))dt$ converge.

On notera dans la suite :

$$\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln(t))dt.$$

(c) Montrer que Z admet une espérance et que $E(Z) = \gamma$.

On pourra utiliser le changement de variable $u = \exp(-\exp(-x))$.

(d) En déduire que X admet une espérance et déterminer $E(X)$ en fonction de γ, μ et a.

Exercice 2 - ECRICOME ECS 2014 (Exerice 1 - adapté)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P, Q appartenant $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose :

$$u_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \ln(x) \end{array} \right.$$

Pour toute fonction f appartenant à E, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

et on note φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ (c'est-à-dire que E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions u_1, v_1, ..., u_n, v_n).
   On **admettra** que la famille $\mathcal{B} = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ est une base de E.
2. Justifier que chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.
3. Démontrer que φ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.
4. Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.
5. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? Quelles sont les valeurs des termes diagonaux de M ?
6. Soit $f \in E$ un vecteur tel que $\varphi(f) = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que λ est non nul et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ g(x) = x^{-1/\lambda}\int_0^x f(t)dt.$$
   Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+^\star$. En déduire l'expression de la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ puis celle de f.
7. Pour tout $k \in [\![1, k]\!]$, on note $E_k = \{f \in E,\ \varphi(f) = \frac{1}{k+1}f\}$. Montrer que : $E_k \subset \text{Vect}(u_k)$. En déduire la dimension de E_k pour tout k.

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2020 (Exercice 2)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$.
Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.
   (a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
   On se place désormais sous cette condition.
   (b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$: $\dfrac{1}{\alpha-1} \cdot \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1} \cdot \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.
   (d) En déduire que : $R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha-1)} \cdot \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.
   (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?
   (f) Conjecturer à quel ordre la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{1}{n^n}$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
   (b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$: $0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \dfrac{1}{2\times 3^n}$.
   (c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geqslant 1$: $0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \dfrac{1}{4\times 3^n}$.
   (d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$:
   $0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \dfrac{1}{2^p \times 3^n}$.
   (e) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k \mathrm{d}t$, montrer que :
   $$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$
   (c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$:
   $$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

(d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} \mathrm{d}t.$$

Problème 4 - EML ECS 2013 (Problème 1)

Partie I - Étude d'une fonction f définie par une intégrale.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \mathrm{d}t$ converge.

On note $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0, +\infty[$ par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \mathrm{d}t$.

2. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) \geq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t} \mathrm{d}t$. En déduire $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.
3. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$. En déduire $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
4. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ converge et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

En déduire $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Partie II - Une autre expression intégrale de f.

A. Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale.

5. Soit $(x, h) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^\star$ tel que $h > -\frac{x}{2}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2} \mathrm{d}t$ converge.
   (b) Établir : $\forall t \in [0, +\infty[,\ \left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.
   (c) En déduire : $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2} \mathrm{d}t \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.
6. En déduire que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2} \mathrm{d}t$.
7. Montrer, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $(\epsilon, A) \in]0, 1] \times [1, +\infty[$:

$$\int_\epsilon^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2} \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{-A}}{x+A} + \frac{\mathrm{e}^{-\epsilon}}{x+\epsilon} - \int_\epsilon^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \mathrm{d}t.$$

8. En déduire : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x)$.
9. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x)$.

B. Intervention d'une fonction auxiliaire g.

On note $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0, +\infty[$, par : $g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$.

10. Démontrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ g'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
11. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \mathrm{d}u$ converge et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \mathrm{d}u,$$

puis : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \mathrm{d}u$.

12. Montrer : $\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \mathrm{d}u \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
13. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} \mathrm{d}u$?

Partie III - Étude d'une densité.

On note $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $h(t) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

14. Montrer que h est une densité.
15. Soit X une variable aléatoire réelle admettant h pour densité. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$ à l'aide de $f(1)$.