DS 3 Appro - Algèbre linéaire, v.a.r. à densité

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2022 (Problème - extrait)

1. (a) $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_{\mu,a}(x) &= F'_{\mu,a}(x) = -\left(-\frac{1}{a}\right)\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{a}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right).} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} f'_{\mu,a}(x) &= -\frac{1}{a^2}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) + \left(\frac{1}{a}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right)^2\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{a^2}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right)\left[\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)-1\right].} \end{aligned}$$

(b) On commence par remarquer que $f_{\mu,a}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et donc $\boxed{F_{\mu,a} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

Le signe de $f'_{\mu,a}$ est donc donné par le signe de $\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)-1$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)-1>0 &\Leftrightarrow \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)>1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu-x}{a}>0 \\ &\Leftrightarrow \mu-x>0 \\ &\Leftrightarrow \mu>x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{sur }]-\infty,\mu[,\ F_{\mu,a} \text{ est convexe}}$ et $\boxed{\text{sur }]\mu,+\infty[,\ F_{\mu,a} \text{ est concave.}}$

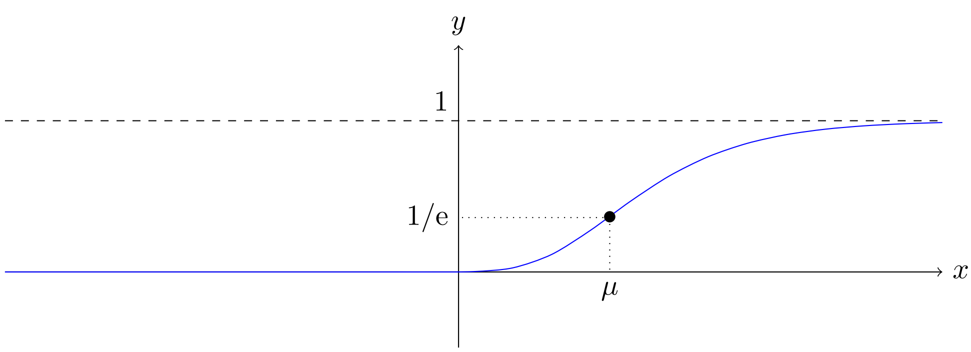
De plus on a :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F_{\mu,a}(x) = \lim_{x\to-\infty}\exp\left(\underbrace{-\exp\left(\underbrace{\frac{\mu-x}{a}}_{\to+\infty}\right)}_{\to-\infty}\right) = 0}$$

et :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F_{\mu,a}(x) = \lim_{x\to+\infty}\exp\left(\underbrace{-\exp\left(\underbrace{\frac{\mu-x}{a}}_{\to-\infty}\right)}_{\to0}\right) = 1.}$$

On peut désormais tracer le graphe de $F_{\mu,a}$:



Le point d'inflexion est en μ d'après la discussion sur la convexité.

(c) $F_{\mu,a}$ est $\mathcal{C}^2$ donc continue, elle est également strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ (d'après le calcul de limites précédent).

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) = y &\Leftrightarrow exp(-\exp(-x)) = y \\ &\Leftrightarrow -\exp(-x) = \ln(y) \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = -\ln(-\ln(y)).} \end{aligned}$$

Et donc G est la fonction définie par :

$$\boxed{G : \left\{ \begin{array}{rcl}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & -\ln(-\ln(y)) \end{array} \right. .}$$

2. On a déjà montré que $F_{\mu,a}$ est strictement croissante, qu'elle est continue et même $\mathcal{C}^1$ et que $\lim_{x\to-\infty} F_{\mu,a}(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_{\mu,a}(x) = 1$. C'est donc une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

   En conséquence, sa dérivée $f_{\mu,a}$ est une densité associée.

3. $X = aZ + \mu$ est obtenue par transformation affine de Z. C'est donc une variable aléatoire réelle à densité. De plus, si on note F_X la fonction de répartition de X et F_Z celle de Z alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{a}\right) = \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right)$$

   puisque $a > 0$. On reconnaît ici la fonction de répartition de la loi de Gumbel de paramètre (μ, a). Et donc on a bien $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a).}$

4. (a) On a $Y = G(U)$ où G est la réciproque de $F_{0,1}$. Comme G est continue, Y est bien une variable aléatoire réelle.

   De plus, en notant F_Y la fonction de répartition de Y, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) = P(G(U) \leqslant x) \\ &= P(\underbrace{F_{0,1}(G(U))}_{=U} \leqslant F_{0,1}(x)). \end{aligned}$$

   Or $F_{0,1}(x) \in]0,1[$. Comme U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, on a $P(U \leqslant F_{0,1}(x)) = F_{0,1}(x)$. D'où :

$$F_Y(x) = F_{0,1}(x).$$

   D'où $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0,1).}$

   (b)

```python
def gumbel(mu,a):
    U = rd.random() # tirage selon U([0,1])
    Y = -np.log(-np.log(U)) # Y suit G(0,1)
    Z = (Y - mu)/a # Z suit G(mu,a)
    return Z
```

5. (a) L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.

   - **En $+\infty$:** On a pour tout $u \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\ln(u)\mathrm{e}^{-u} = \underbrace{\ln(u)\mathrm{e}^{-u/2}}_{\xrightarrow[u\to+\infty]{}0} \mathrm{e}^{-u/2} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\right).$$

     Or $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} du$ converge. Par négligeabilité, l'intégrale $\boxed{\int_1^{+\infty} \ln(u)\mathrm{e}^{-u} du \text{ converge}}$ (et même absolument).

- **En 0 :** On a :

$$\sqrt{u}\ln(u)\mathrm{e}^{-u} \underset{u\to 0^+}{\sim} \sqrt{u}\ln(u) \xrightarrow[u\to 0^+]{} 0.$$

Donc $\ln(u) = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$. Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge (intégrale de Riemann convergente) et donc par négligeabilité, l'intégrale $\boxed{\int_0^1 \ln(u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \text{ converge}}$ (et même absolument).

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \ln(u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \text{ converge.}}$

(b) On pose $\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$. Cette application est strictement décroissante et $\mathcal{C}^1$. De plus :

$$\lim_{u\to+\infty} \varphi(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u\to 0} \varphi(u) = 1.$$

Donc, d'après le théorème de changement de variable, en posant $t = \mathrm{e}^u$, on a $\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ et les intégrales suivantes ont même nature et sont égales en cas de convergence :

$$\int_0^1 \ln(-\ln(t))\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{+\infty}^0 \ln(-\ln(\mathrm{e}^{-u}))(-\mathrm{e}^{-u})\mathrm{d}u.$$

Or $\int_{+\infty}^0 \ln(-\ln(\mathrm{e}^{-u}))(-\mathrm{e}^{-u})\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \ln(u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ est l'intégrale que l'on vient d'étudier.

$\boxed{\text{Donc les deux intégrales sont convergentes.}}$

(c) Z a une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{0,1}(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.
On cherche à poser $u = \exp(-\exp(-x))$. Remarquons que :

$$u = \exp(-\exp(-x)) \Leftrightarrow -\ln(u) = \exp(-x) \Leftrightarrow x = -\ln(-\ln(u)).$$

Posons $\psi : u \mapsto -\ln(-\ln(u))$ définie sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette fonction est strictement croissante (on reconnaît G qui est la bijection réciproque d'une fonction strictement croissante) et elle est $\mathcal{C}^1$. De plus :

$$\lim_{u\to 0} \psi(u) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{u\to 1} \psi(u) = +\infty.$$

Donc d'après le théorème de changement de variable, les intégrales suivantes ont même nature et sont égales en cas de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\exp(-x)\exp(-\exp(-x))\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^1 |-\ln(-\ln(u))|\exp(-(-\ln(-\ln(u))))u\left(-\frac{-\frac{1}{u}}{-\ln(u)}\right)\mathrm{d}u$$

Or $\exp(-(-\ln(-\ln(u)))) = -\ln(u)$. Donc la seconde intégrale se simplifie en : $\int_0^1 |\ln(-\ln(u))|\mathrm{d}u$.
De plus si $u \in]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$, on a $|\ln(-\ln(u))| = \ln(-\ln(u))$. Or $\int_0^1 \ln(-\ln(u))\mathrm{d}u$ converge donc $\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \ln(-\ln(u))\mathrm{d}u$ converge également.
De même, si $u \in]\frac{1}{\mathrm{e}}, 1[$, on a $|\ln(-\ln(u))| = -\ln(-\ln(u))$. Or $-\int_0^1 \ln(-\ln(u))\mathrm{d}u$ converge donc $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 (-\ln(-\ln(u))$
converge également.
Donc les deux intégrales convergent et donc $\boxed{Z \text{ admet une espérance.}}$
De plus :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\exp(-x)\exp(-\exp(-x))\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \ln(-\ln(t))\mathrm{d}t \boxed{= \gamma.} \end{aligned}$$

(d) Maintenant, on a $X = aZ + \mu$. Donc par linéarité de l'espérance, X admet une espérance et :

$$\boxed{E(X) = a\gamma + \mu.}$$

Exercice 2 - ECRICOME ECS 2014 (Exerice 1 - adapté)

1. On sait que $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Montrons que E est un sous-espace de F.
   - On a bien $E \subset F$.
   - Soit f la fonction nulle. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:
   $$f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x)$$
   à condition de poser $P = Q = 0$ qui sont bien des polynômes de degré au plus $n-1$ (le degré du polynôme nul est $-\infty$). Donc $f \in E$ et E est non vide.
   - Soient $f, g \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ g(x) = x\tilde{P}(x) + x\ln(x)\tilde{Q}(x)$$
   où P, Q, $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ sont des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:
   $$\begin{array}{rcl} (f+\lambda g)(x) & = & f(x) + \lambda g(x) \\ & = & xP(x) + x\ln(x)Q(x) + \lambda(x\tilde{P}(x) + x\ln(x)\tilde{Q}(x)) \\ & = & x(P(x) + \lambda\tilde{P}(x)) + x\ln(x)(Q(x) + \tilde{Q}(x)) \end{array}$$
   et donc comme $P + \tilde{P}$ et $Q + \tilde{Q}$ sont dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(f + \lambda g) \in E$.

   Donc E est un sous-espace de F et donc $\boxed{E \text{ est bien un espace vectoriel.}}$
   De plus, soit $f \in E$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:
   $$f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x)$$
   avec $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est donnée par $1, X, X^2, \dots, X^{n-1}$. On peut donc écrire :
   $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + x\ln(x)(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k+1}\ln(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}u_k(x) + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}v_k(x) \end{array}$$
   et donc $f \in \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$. Ainsi $\boxed{E \subset \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).}$
   Réciproquement, on a clairement $u_k \in E$ (avec $P = X^{k-1}$ et $Q = 0$) et $v_k \in E$ (avec $P = 0$ et $Q = X^{k-1}$). Donc $\boxed{E \text{ contient l'espace engendré } \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).}$
   D'où $\boxed{E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).}$
2. Soit $f \in E$. Notons :
   $$f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x)$$
   avec $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée. Donc :
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \times P(0) + 0 \times Q(0) = 0.$$
   Ainsi $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}_+ \text{ en posant } f(0) = 0.}$
   Soit maintenant $k \in [\![1, n]\!]$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:
   $$\varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^k \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}u_k(x)$$
   donc $\boxed{\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k.}$
   Pour v_k, l'intégrale est généralisée 0, mais c'est en fait faussement improre. Cela dit, je vais détailler l'intégration par partie dans le cas généralisé, pour que la correction soit complète. Pour $\epsilon \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :
   $$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\epsilon^x \underbrace{t^k}_{=u'(t)} \underbrace{\ln(t)}_{=v(t)} \mathrm{d}t & = & \left[\underbrace{\frac{t^{k+1}}{k+1}}_{=u(t)} \underbrace{\ln(t)}_{=v(t)}\right]_\epsilon^x - \displaystyle\int_\epsilon^x \underbrace{\frac{t^{k+1}}{k+1}}_{=u(t)} \underbrace{\frac{1}{t}}_{=v'(t)} \mathrm{d}t \\ & = & \dfrac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \dfrac{\epsilon^{k+1}\ln(\epsilon)}{k+1} - \dfrac{1}{k+1}\left[\dfrac{t^{k+1}}{k+1}\right]_\epsilon^x \\ & = & \dfrac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)^2} - \dfrac{\epsilon^{k+1}\ln(\epsilon)}{k+1} + \dfrac{\epsilon^{k+1}}{(k+1)^2}. \end{array}$$

On a $\epsilon^{k+1}\ln(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon\to 0^+]{} 0$ par croissance comparée et donc :

$$\int_0^x t^k \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Puis :

$$\varphi(v_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^k \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{x^k\ln(x)}{k+1} - \frac{x^k}{(k+1)^2} = \frac{1}{k+1}v_k(x) - \frac{1}{(k+1)^2}u_k(x)$$

c'est-à-dire : $\boxed{\varphi(v_k) = \frac{1}{k+1}v_k - \frac{1}{(k+1)^2}u_k.}$

3. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\begin{aligned}
\varphi(f+\lambda g)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x (f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \lambda\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right) = \varphi(f)(x) + \lambda\varphi(g)(x) \\
&= (\varphi(f)+\lambda\varphi(g))(x).
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de problème de convergence puisque les fonctions de E sont prolongeables par continuité et donc les intégrales sont faussement impropres.
D'où $\boxed{\varphi(f+\lambda g) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g).}$ Donc φ est linéaire.
Soit maintenant $f \in E$. On a :

$$f = a_1u_1 + b_1v_1 + \cdots + a_nu_n + b_nv_n$$

car $(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ est une base de E et est donc génératrice. On a alors par linéarité de φ :

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= a_1\varphi(u_1) + b_1\varphi(v_1) + \cdots + a_n\varphi(u_n) + b_n\varphi(v_n) \\
&= a_1\frac{1}{2}u_1 + b_1\left(\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}u_1\right) + \cdots + a_n\frac{1}{n+1}u_n + b_n\left(\frac{1}{n+1}v_n - \frac{1}{(n+1)^2}u_n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a_1 - \frac{b_1}{2}\right)u_1 + \frac{b_1}{2}v_1 + \cdots + \frac{1}{n+1}\left(a_n - \frac{b_n}{n+1}\right)u_n + \frac{b_n}{n+1}v_n \\
&\in \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi(f) \in E.}$

4. Les calculs de $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$ permettent de déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} & -\frac{1}{(n+1)^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1}
\end{pmatrix}$$

C'est une matrice diagonale par bloc, chaque bloc correspondant à un couple (u_k, v_k).

5. La matrice obtenue est une matrice triangulaire supérieure. $\boxed{\text{Ces termes diagonaux sont } \{\frac{1}{k+1},\ k \in [\![1,n]\!]\}}$ et sont tous non nuls. Donc la matrice M est inversible.
En conséquence, $\boxed{\varphi \text{ est bijectif.}}$

6. g est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$. En effet, comme f est continue (techniqument prolongeable par continuité), $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ en est la primitive qui s'annule en 0.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$g'(x) = -\frac{1}{\lambda}x^{-1/\lambda-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x^{-1/\lambda}f(x).$$

Or $\varphi(f) = \lambda f$ c'est-à-dire pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lambda f(x).$$

Donc :

$$g'(x) = -\frac{1}{\lambda}x^{-1/\lambda-1}x\lambda f(x) + x^{-1/\lambda}f(x) = 0.$$

Donc $\boxed{g \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^\star.}$ Ainsi il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\boxed{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = Kx^{1/\lambda}.}$$

Puis, en dérivant :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x) = \frac{K}{\lambda}x^{1/\lambda-1}.}$$

On peut encore écrire f de la forme $K'x^{1/\lambda-1}$ puisque la constante λ peut être réabsorbé dans K.

7. On vient de voir que pour $\lambda \neq 0$, une solution à $\varphi(f) = \lambda f$ est nécessairement de la forme : $f(x) = K'x^{1/\lambda-1}$. Donc si f vérifie $\varphi(f) = \frac{1}{k+1}f$ alors nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x) = K'x^{1/(1/k+1)-1} = K'x^k = K'u_k(x)$. Et on peut l'écrire : $f \in \mathrm{Vect}(u_k)$.

   On a donc bien $\boxed{E_k \subset \mathrm{Vect}(u_k).}$

   L'inclusion réciproque est vrai puisqu'on a déjà montré que $\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k$. Donc : $\boxed{E_k = \mathrm{Vect}(u_k).}$

   On en déduit :

$$\boxed{\dim E_k = 1}$$

   puisque les u_k sont non nuls et forment donc tous individuellement des bases des $\mathrm{Vect}(u_k)$.

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2020 (Exercice 2)

1. (a) $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de Riemann. Elle converge si et seulement si $\boxed{\alpha > 1.}$

   (b) Soit $k \geqslant 2$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $k \leqslant t$. Ainsi, puisque $\alpha > 0$, on a : $\frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$. Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1}\frac{1}{k^\alpha}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{k^\alpha}}.$$

   De même, pour tout $t \in [k-1, k]$, on a $k \geqslant t$. Ainsi, puisque $\alpha > 0$, on a : $\frac{1}{t^\alpha} \geqslant \frac{1}{k^\alpha}$. Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \geqslant \underbrace{\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^\alpha}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{k^\alpha}}.$$

   Ainsi :

$$\boxed{\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t.}$$

   (c) Soit $n \geqslant 1$. On a en sommant de $n+1$ à $N \geqslant n$:

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{N}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t}_{=\int_{n+1}^{N+1}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \underbrace{\sum_{k=n+1}^{N}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t}_{=\int_{n}^{N}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t}.$$

Comme $\alpha > 1$, les intégrales convergent lorsque $N \to +\infty$. La somme du milieu converge également puisque c'est le reste de la série convergente $\sum_{n \geqslant 1} u_n$. Par passage à la limite, on a :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant R_{1,n} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t.$$

Pour $A \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{n+1}^{A} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{A} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

On a de même : $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Et donc :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{n,1} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.}$$

(d) On a donc :

$$\underbrace{\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} \leqslant \frac{R_{n,1}}{\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}} \leqslant 1.$$

Donc par encadrement :

$$\frac{R_{n,1}}{\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{R_{n,1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.}$$

(e) $\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est de signe constant. Donc $R_{n,1}$ est également de signe constant au voisinage de $+\infty$.
Par équivalence de séries à termes de signes constants, $\sum_{n \geqslant 1} R_{n,1}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ ont même nature.
Or la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann, qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 2$.
Donc $\sum_{n \geqslant 1} R_{n,1}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$. Donc $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2 si et seulement si $\boxed{\alpha > 2.}$

(f) Puisque $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 1 si et seulement si $\alpha > 1$ et converge à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$, on peut conjecturer que $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p si et seulement si $\alpha > p$.
Ou pour revenir aux termes de l'énoncé, on conjecture que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à tout ordre p tel que $p < \alpha$.

2. (a) Pour $n \geqslant 2$, on a $n^n \geqslant n^2$. Donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc par comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \text{ converge.}}$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto k^x$ est croissante. Donc $k^3 \leqslant k^k$. Et donc :

$$\boxed{0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{3^k}.}$$

Les séries convergent. Donc les restes des séries existent. En sommant, on a :

$$0 \leqslant \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{=R_{1,n}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i+n+1} \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i}}_{=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{2\times 3^n}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2\times 3^n}.}$$

(c) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\times 3^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$ donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} R_{1,n}$ converge.

Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$

En sommant, on obtient :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2\times 3^n}.$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2\times 3^n} = \frac{1}{4\times 3^n}$ (calcul similaire au calcul précédent). Donc :

$$\boxed{0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4\times 3^n}.}$$

(d) Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^\star$.

- **Initialisation :** On a déjà montré l'assertion pour $p = 1$ (et même $p = 2$).
- **Hérédite :** Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p 3^n}$$

et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge à l'ordre p c'est-à-dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} R_{p-1,n}$ converge.
On a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p 3^k} = \frac{1}{2^{p+1}3^n}$ (calcul identique encore une fois). Donc par comparaison $\sum_{k=n+1}^{p} R_{p,k}$ converge et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge à l'ordre $p+1$. De plus :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 0 \leqslant R_{p+1,n} \leqslant \frac{1}{2^{p+1}3^n}.}$$

(e) D'après la question précédente, on a pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \frac{1}{2^n 3^n}$ c'est-à-dire :

$$0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \frac{1}{6^n}.$$

Comme la série des $\frac{1}{6^n}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, on a bien $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} R_{n,n} \text{ converge.}}$

3. (a) Pour tout $t \in [0,1]$, on a $1 + t \geqslant t$. Donc :

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_0^1 t^n \mathrm{d}t}_{=\frac{1}{n+1}}.$$

Par encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0.}$$

(b) On a :

$$\boxed{\int_0^1 t^k \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}.}$$

Puis pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^n \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^n\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} \mathrm{d}t \\
&= \boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t.}
\end{aligned}$$

(c) On a $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t = 0$ donc :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge}}$ et vaut $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$.
De plus :

$$\begin{aligned}
R_{1,n} &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t\right) \\
&= \boxed{\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t.}
\end{aligned}$$

(d) Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^\star$.

- **Initialisation :** On a déjà montré la proposition pour $p = 1$.
- **Hérédité :** Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} \mathrm{d}t.$$

Montrons la même chose au rang $p+1$.

Pour $N \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} R_{p,n} &= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \left(\sum_{n=0}^{N} (-t)^n \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \cdot \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{p+N+1}}{(1+t)^{p+1}} \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme dans la première sous-question, on montre que :

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{p+N+1}}{(1+t)^{p+1}} \mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} R_{p,n}$ converge vers $\int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} \mathrm{d}t$. Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge à l'ordre } p+1.}$
De plus pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} &= \sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} - \sum_{k=0}^{n} R_{p,k} \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} \mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{p+n+1}}{(1+t)^{p+1}} \mathrm{d}t \right) \\ &= \boxed{\int_0^1 \frac{(-t)^{n+(p+1)}}{(1+t)^{p+1}} \mathrm{d}t.}\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $p \geqslant 1$, $\boxed{\sum_{n \geqslant 0} u_n \text{ converge à l'ordre } p}$ et pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\boxed{R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} \mathrm{d}t.}$$

Problème 4 - EML ECS 2013 (Problème 1)

Partie I - Étude d'une fonction f définie par une intégrale.

1. Puisque $x > 0$, le dénominateur ne s'annule jamais et la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale est donc généralisée uniquement en $+\infty$.
   De plus, on a :
   $$t^2 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \underset{t \to +\infty}{\sim} t\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$
   la limite étant donnée par croissance comparée. Donc $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} = \underset{t \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ et comme l'intégrale de $\frac{1}{t^2}$ converge en $+\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \mathrm{d}t$ est donc absolument convergente et donc convergente.
2. Soit $x > 0$. On a :
   $$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \mathrm{d}t.$$
   Par positivité de l'intégrale on a :
   $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \mathrm{d}t \geq 0.$$

De plus, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est décroissante. Ainsi pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t} \geq \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}.$$

Et donc par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{f(x) \geq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t.}$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-1}\ln(x+t)\right]_0^1 = \mathrm{e}^{-1}\left(\ln(1+x) - \ln(x)\right) = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Et :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty,$$

puisque $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. Donc par comparaison :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.}$$

3. On a prouvé à la question précédente que :

$$f(x) \geq \mathrm{e}^{-1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Or $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0$ donc on a bien $\boxed{f(x) > 0}$ (pour tout $x > 0$).
D'autre part, on a, sous-réserve de convergence :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \underset{(\text{car } x+t \geq x)}{\leq} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

De plus, pour $A > 0$, on a :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A = 1 - \mathrm{e}^{-A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$

Donc la dernière intégrale converge et on a :

$$\boxed{f(x) \leq \frac{1}{x}.}$$

Par encadrement $(0 < f(x) \leq 1/x)$, puisque $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a bien :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.}$$

4. On a :

$$t\mathrm{e}^{-t} = \underbrace{t\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{}0} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right).$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge absolument et donc converge.

Soit désormais $x>0$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|f(x)-\frac{1}{x}\right| &= \left|\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\right|\\
&= \left|\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right|\\
&= \left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{x+t}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}t\right|\\
&\quad \text{(l'intégrale converge comme somme d'intégrales convergentes)}\\
&= \left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{t}{x(x+t)}\mathrm{d}t\right|\\
&= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{t}{x(x+t)}\mathrm{d}t\\
&\quad \text{(par positivité de l'intégrale)}
\end{aligned}$$

Pour $t\geq 0$, on a $x(x+t)\geq x^2$. Donc, par croissance de l'intégrale, sous réserve de convergence, on a :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{t}{x(x+t)}\mathrm{d}t\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{t}{x^2}\mathrm{d}t\leq\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Et comme on a prouvé la convergence de la dernière intérgale, on a :

$$\boxed{\left|f(x)-\frac{1}{x}\right|\leq\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.}$$

On a ainsi pour tout $x>0$:

$$|xf(x)-1|\leq\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Or $\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ (l'intégrale est une constante dans la formule). Donc, par encadrement : $xf(x)-1\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, c'est-à-dire $xf(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ et donc on a bien :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}.}$$

Partie II - Une autre expression intégrale de f.

A. Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale.

5. (a) Encore une fois, l'intégrale est généralisée en $+\infty$.
   On a :

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}=\underbrace{\frac{1}{(x+t)^2}}_{\xrightarrow[t\to0]{}0}\times\mathrm{e}^{-t}=\underset{t\to0}{o}(\mathrm{e}^{-t}).$$

   Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$ converge absolument.

   (b) Soit $t\geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\\
=&\left|\frac{1}{h}\times\frac{-h}{(x+t)(x+h+t)}+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\\
=&\left|\frac{1}{(x+t)^2}-\frac{1}{(x+t)(x+h+t)}\right|\\
=&\left|\frac{h}{(x+t)^2(x+h+t)}\right|.
\end{aligned}$$

Or $t \geq 0$ donc $\frac{1}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{x^2}$. De plus, comme $h > -x/2$, on a $x+h+t > x/2+t$ et donc $\frac{1}{x+h+t} \leq \frac{2}{x}$. On a donc :

$$\boxed{\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right| \\
= \quad & \left|\frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+h+t)^2}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right) + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right| \\
= \quad & \left|\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{h}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+h+t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\right) + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\right]\mathrm{d}t\right| \\
& \text{(l'intégrale converge comme somme et différence d'intégrales convergentes)} \\
= \quad & \left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right]\mathrm{d}t\right| \\
\leq \quad & \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right|\mathrm{d}t \\
& \text{(inégalité triangulaire sous réserve de convergence)} \\
\leq \quad & \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \times \frac{2|h|}{x^3}\mathrm{d}t \\
& \text{(croissance de l'intégrale)} \\
\leq \quad & \frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Donc :

$$\boxed{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.}$$

6. Pour $x > 0$, on a : $\frac{2|h|}{x^3} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et donc, par encadrement :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

et ainsi :

$$\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t.}$$

Et donc comme $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est le taux de variation de f en x, f est effectivement dérivable en x et :

$$\boxed{f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t.}$$

7. Soit $x > 0$, et soit $(\epsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$. On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t &= \int_\epsilon^A \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{=\,u(t)} \times \underbrace{\frac{1}{(x+t)^2}}_{=\,v'(t)}\mathrm{d}t \\
&= \left[\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{=\,u(t)} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{x+t}\right)}_{=\,v(t)}\right]_\epsilon^A - \int_\epsilon^A \underbrace{-\mathrm{e}^{-t}}_{=\,u'(t)} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{x+t}\right)}_{=\,v(t)}\mathrm{d}t \\
&= \boxed{-\frac{\mathrm{e}^{-A}}{x+A} + \frac{\mathrm{e}^{-\epsilon}}{x+\epsilon} - \int_\epsilon^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t.}
\end{aligned}$$

8. Avec l'égalité précédente, on a :

$$\frac{-\mathrm{e}^{-A}}{x+A}+\frac{\mathrm{e}^{-\epsilon}}{x+\epsilon}-\int_{\epsilon}^{A}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} -\frac{\mathrm{e}^{-A}}{x+A}+\frac{1}{x}-\int_{0}^{A}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

La limite existe puisque l'intégrale est une intégrale sur un segment (et donc continue par rapport à sa borne). Donc :

$$\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{-A}}{x+A}+\frac{1}{x}-\int_0^A\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

On a de plus :

$$-\frac{\mathrm{e}^{-A}}{x+A}+\frac{1}{x}-\int_0^A\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{x}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$$

où l'existence de la limite est cette fois-ci donnée par la convergence de l'intégrale. D'où :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t.}$$

On a donc :

$$\boxed{f'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}+f(x).}$$

9. f' est continue comme somme de fonctions continues sur $]0,+\infty[$. Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
La fonction $x\mapsto -\frac{1}{x}+f(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions $\mathcal{C}^1$. Donc f' est $\mathcal{C}^1$ et f est donc $\mathcal{C}^2$.
De plus :

$$\boxed{f''(x) = \frac{1}{x^2}+f'(x)}$$

en utilisant la formule de la dérivée de la somme.

B. Intervention d'une fonction auxiliaire g.

10. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit. De plus, on a pour $x>0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}f(x)+\mathrm{e}^{-x}f'(x) \\ &= -\mathrm{e}^{-x}f(x)+\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{1}{x}+f(x)\right) \\ &= \boxed{-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.} \end{aligned}$$

11. L'intégrale $\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u$ est généralisée en $+\infty$ mais pas en x (puisque $x>0$). De plus :

$$\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} = \underbrace{\frac{1}{u}}_{\xrightarrow[u\to+\infty]{} 0}\times\mathrm{e}^{-u} = \underset{u\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-u}).$$

Donc l'intégrale est convergente (et même absolument). Posons h la fonction définie pour $x\in]0,+\infty[$ par : $h(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u$.
Comme pour $x>0$:

$$g'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

Donc il existe une constante $A\in\mathbb{R}$ telle que :

$$g(x) = A+\int_1^x\left(-\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\right)\mathrm{d}u.$$

De plus, comme $f(x)\sim\frac{1}{x}$, on a :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Donc :

$$A - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = 0$$

puisque l'intégrale converge. Et donc :

$$\boxed{g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u + \int_1^{x} \left(-\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\right)\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u + \int_x^{1} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u.}$$

Comme $g(x) = \mathrm{e}^{-x}f(x)$ pour tout $x > 0$, on en déduit :

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{x}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u.}$$

12. D'après la question précédente, on a pour tout $x > 0$: $\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-x}f(x)$. Or $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. Donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.}$$

13. Avec la question précédente, on a $n^2\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$ qui est de signe positif. Donc la série $\sum_{n\geq 1} n^2\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$ a la même nature que la série de terme générale : $\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$. Or cette dernière série est une série géométrique dérivée qui est convergente puisque la raison est $\frac{1}{\mathrm{e}} \in [0, 1[$.
Donc la série $\sum_{n\geq 1} n^2\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u$ est convergente.

Partie III - Étude d'une densité.

14. Vérifions que h est une densité :
   - **Positivité :** h est positive (nulle sur $\mathbb{R}_-^\star$ et produit de termes positifs sur $\mathbb{R}_+$).
   - **Continuité :** h est continue sauf éventuellement en 0.
   - **Intégrale :** On a $\int_{-\infty}^0 h(t)\mathrm{d}t = 0$ puisque h est nulle sur $\mathbb{R}_-^\star$. De plus, on a déjà prouvé que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t$ converge. Donc l'intégrale de h sur $\mathbb{R}$ converge. De plus :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{f(1)(1+t)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{f(1)}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{f(1)} \times f(1)\boxed{= 1.} s\end{aligned}$$

Donc h est bien une densité.

15. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. Et ici, la convergence absolue est équivalente à la convergence car $th(t)$ est nulle pour $t < 0$ et positive (au sens large) pour $t \geq 0$. Or $t \times h(t) = \frac{1}{f(1)} \times \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1+t} = \frac{1}{f(1)}\left(\mathrm{e}^{-t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\right)$. Comme l'intégrale de e^{-t} et $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}$ converge sur $[0, +\infty[$, X admet une espérance. De plus :

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} th(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{f(1)}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{f(1)} \times (1 - f(1)) = \frac{1}{f(1)} - 1.}$$