Code sujet : 298

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC BS

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Lundi 29 avril 2024, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de Python sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ et on a en particulier $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1) a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

b) En déduire que $u_0 = \frac{1}{4}\ln(3)$.

2) Calculer u_1.

3) a) Pour tout entier naturel n, exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n.

b) Compléter la fonction `Python` ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

```
def suite(n):
    if (-1)**n==1:
        u=np.log(3)/4
        for k in range(2,n+1,2):
            u=4*u-...
    else:
        u=np.log(2/np.sqrt(3))
        for k in range(3,n+1,2):
            u=4*u-...
    return u
```

4) a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

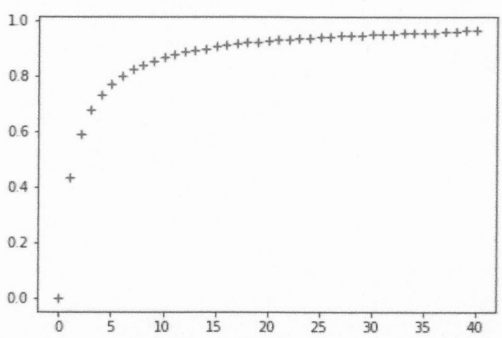
b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

5) a) On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```
x=np.arange(0,41)
u=[] # liste vide
for n in range(41):
    u.append(3*n*suite(n))
plt.plot(x,u,'+')
plt.show()
```

Ce script renvoie le graphique suivant :



Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

❶ $u_n \underset{+\infty}{\sim} 3n$. ❷ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. ❸ $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$. ❹ $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

b) Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

c) Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\left(4-x^2\right)^2} \mathrm{d}x = 0$$

d) Vérifier la conjecture établie à la question 5a).

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1) Soit f la fonction qui à tout réel x associe

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

c) En déduire, par des considérations de parité, que X a une espérance et que $E(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

2) On note F_X la fonction de répartition de X. Déterminer $F_X(x)$ selon que $x < 0$ ou $x \geq 0$.

3) Simulation

a) On pose $Z = X^2$ et on note F_Z sa fonction de répartition. Déterminer $F_Z(x)$ dans chacun des cas $x < 0$ et $x \geq 0$ et montrer que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

b) Utiliser la question 3a) pour écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulX()` qui renvoie une simulation de X.

4) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \dfrac{X}{\sqrt{n}}$ et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

a) Montrer que l'on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-n x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

c) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$$

5) On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Exprimer, pour tout réel x, $P(M_n > x)$ à l'aide de la fonction F_X, puis en déduire que M_n suit la même loi que la variable Y_n présentée à la question 4).

b) Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle renvoie une simulation de M_n à l'appel de `simulM(n)`.

```
def simulM(n):
    X=np.array([------ for k in range(n)])
    M=------
    return M
```


Tournez la page S.V.P.