CHAPITRE 10 - APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Généralités sur les applications linéaires

1.1 Définition

Définition : Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite ($\mathbb{R}$-)linéaire si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque : On peut plus simplement vérifier $f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.
Exemples : Identité, application nulle, application canoniquement associée à une matrice, opérateur dérivée dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Définition : Endomorphisme

Les applications linéaires de E dans lui-même sont appelés endormorphisme de E. On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endormorphismes de E.

Propriétés :

- $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$;
- L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
- $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$;
- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

1.2 Noyau, image

E et F sont deux espaces vectoriels. f est une application linéaire de E dans F.

Définition : Noyau

On appelle noyau de f et on note $\mathrm{Ker} f$ l'ensemble : $\mathrm{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.

Proposition

$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples : $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+y-z=0\}$, $\{P \in \mathbb{R}_n[x],\ P(42)=0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x+y=0 \text{ et } x-y=0\}$.

Proposition

f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.

Remarques :

- Attention, on ne peut parler de $\ker f$ que si f est linéaire !
- En revanche, montrer que f est injective sans passer par $\ker f$ si f est linéaire est très mal vu...
- On a toujours $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Exemples :

- $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ x+y \end{pmatrix}$ est-elle injective ?
- $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ définie par $\varphi(P) = P'$ est-elle injective ?
- $\psi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$ définie par $\psi(P)(x) = \int_0^x P(t)\mathrm{d}t$ est-elle injective ?

Définition : Image

On appelle image de f et on note $\mathrm{Im} f$ l'ensemble :

$$\mathrm{Im} f = \{f(x), x \in E\}.$$

Proposition

- $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.
- f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.

Exemples : f, φ et ψ sont-elles surjectives ?

2 Isomorphismes

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. Si φ est bijective, alors $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.
Dans ce cas, on dit que φ est un isomorphisme de E dans F. On appelle aussi automorphismes de E les isomorphismes de E dans E. On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Remarque : Un automorphisme est donc un endomorphisme bijectif.
Propriétés :

- Si f et g sont des isomorphismes alors $g \circ f$ est un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- **Rappel :** E est de dimension n ssi il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$.
- Il existe un isomorphisme de E dans F ssi $\dim E = \dim F$.
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

3 Dimension finie

3.1 Image d'une base

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Exemples : déterminer une base des images de Id_E, $0_{E,F}$, $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y-z \\ x-z \\ x+y-z \end{pmatrix}$, $\psi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], P \mapsto P' + P$.

3.2 Rang

Définition : Rang

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, on dit que f est de rang fini. On appelle alors rang de f et on note $\mathrm{rg} f$ la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Propriété :

- $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim F$.
- $\mathrm{rg}(f) = \dim F$ ssi f est surjective.

Théorème : Théorème du rang

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Corollaires :

- Si f est injective, alors $\dim E \leqslant \dim F$.
- Si f est surjective, alors $\dim E \geqslant \dim F$.
- Si f est bijective, alors $\dim E = \dim F$.
- Si $\dim E = \dim F$, f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.
- De manière équivalent, si $\dim E = \dim F$, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = n \Leftrightarrow f$ est bijective.

4 Matrices d'applications linéaires

4.1 Matrice d'un endomorphisme dans une base

Définition : Matrice d'une application linéaire (HP)

On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}'$ la matrice de $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}'$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$.

Remarque : Attention la matrice dépend du choix des **deux** bases.
Exemples :

- Matrice de $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$
- Matrice de $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x-y \\ y \\ x-2y \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Matrices de Id_E et $0_E, F$.
- Matrice de $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P' + P$.
- Matrice de $\psi : M \mapsto AM - MA$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Définition : Application canoniquement associée à une matrice

Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle $f \in \mathcal{L}(R^p, \mathbb{R}^n)$ définie par :

$$f(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_n)$$

avec $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$ l'application canoniquement associée à M.

Exemple : Application associée à $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition : Matrice d'un endomorphisme

La matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).$$

Proposition

Un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est entièrement caractérisée par la donnée de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$.

Propriétés :

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$;
- en particulier : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$;
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$;
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$;
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

Exemple : Calculer la matrice de $(f \circ f - 2\mathrm{Id})^{-1}$ où f est l'application canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition : Polynôme de matrice

Avec les notations précédentes : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^k$.
Plus généralement, si $P \in \mathbb{R}[x]$ alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

Définition : Polynôme annulateur

On dit que P est un polynôme annulateur de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ si $P(A) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exemple : Vérifier que $x^2 + 1$ est annulateur de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2 Rang d'une matrice

Définition : Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple : Rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et rang de $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Propriétés :

- $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.
- En conséquence, le rang de A est aussi le rang de la famille de ses lignes dans $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.
- On ne change pas le rang lorsque l'on effectue des opérations de Gauss sur la matrice.
- Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, A est inversible ssi $\mathrm{rg}(A) = n$.
- En particulier, A n'est pas inversible si elle a deux lignes ou deux colonnes identiques.

Proposition

On a : $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right)$.

Exemple : déterminer le rang de $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], P \mapsto P'$.

4.3 Changement de base

Proposition : Formule de changement de base

On a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Exemple : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Matrice dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Définition : Matrices semblables

Deux matrices A et B sont semblables s'il existe P inversible telle que $A = P^{-1}BP$.

Remarque : A et B sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

5 Mathématiques approfondies

5.1 Projecteurs

Définition : Projecteur

Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. Tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.
On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'endormorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ qui à x associe x_1.

Remarque : La définition affirme que p est linéaire, ce serait à vérifier.

Proposition

Soient E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
Dans ce cas, p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèleement à $\ker p$.

Démonstration : à faire.
Exemple : Montrer que $M \mapsto \frac{M + {}^tM}{2}$ est un projecteur.

5.2 Formes linéaires et hyperplans

Définition : Forme linéaire

Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$ est appelée forme linéaire sur E.

Remarque : $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel (de dimension 1). Une forme linéaire est donc bien une application linéaire.

Définition : Hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Un sous-espace vectoriel de F de E est appelé hyperplan de E si $\dim(F) = \dim(E) - 1$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors un sous-espace vectoriel F de E est un hyperplan de E si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $F = \ker \varphi$.

Exemple : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 3y - t = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

5.3 Sous-espaces stables par un endormorphisme

Définition : Sous espace stable

Soit E un espace vectoriel et f un endormorphisme de E. Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par f si :

$$\forall x \in F,\ f(x) \in F.$$

Exemples :

- $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces stables.
- $f : (x, y) \mapsto (5x + 3y, -6x_4y)$ admet $\text{Vect}((1, -2))$ comme sous espace stable.
- $E = \mathbb{R}[X]$ et $f : P \mapsto XP'$. $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.

Remarques :

- Soient f un endormorphisme et F un sous espace vectoriel. Considérons la restriction de f à F notée $f|_F$. Si F est stable par f alors $f|_F$ va de F dans F. $f|_F$ est donc un endormorphisme de F.
- Interprétation matricielle.

Proposition

Soit f un endormorphisme de E. $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont stables par f.

5.4 Trace d'une matrice carrée

Définition : Trace

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la quantité :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

C'est donc la somme des coefficients diagonaux.

Exemples :

- $\mathrm{tr}(0) = 0$ et $\mathrm{I_n} = n$;
- $\mathrm{tr}(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$;
- Si A est antisymétrique alors $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Propriétés :

- L'application $\mathrm{tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.
- Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- En conséquence, deux matrices semblables ont donc même trace.

Définition : Trace d'un endormophisme (hors-programme)

La proposition précédente permet de définir la trace d'un endormorphisme : c'est la trace de sa matrice dans n'importe quelle base.

Remarque : L'intérêt est surtout de voir que la trace est une propriété de l'endomorphisme lui-même et permet donc de récupérer des informations sur lui

Exemple : Détermination du rang d'un projecteur avec la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.