Chapitre A1 - Équations différentielles

1 Généralités

1.1 Notion d'équation différentielle

Définition : Équation différentielle

On appelle **équation différentielle** toute équation dont l'inconnue est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et faisant intervenir f et ses dérivées.
Une solution d'une équation différentielle est une fonction f suffisamment régulière pour que l'équation ait un sens et telle que l'équation soit vérifiée.

Remarques :

- En général, on note y l'inconnue dans les équations différentielles.
- **Pour les équations différentielles uniquement,** on s'autorise de mélanger les notations y et $y(x)$.

Exemples :

- $y' = 2$;
- $y' - 2y = 0$;
- $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^t$;
- $yy' = \sqrt{1-t}$;

Remarques :

- Chacune des équations précédentes est une équation **fonctionnelle**, c'est-à-dire que l'égalité est affirmée entre des fonctions.
- Par convention, on a tendance à mettre les termes qui contiennent y à gauche et les éventuels termes avec t ou x à droite.
- Parfois, on impose en plus des *conditions initiales*, par exemple $y(0) = 1$.
- Les équations différentielles apparaissent très souvent dans les sciences appliquées.
  Exemples :
  - Mouvement d'un pendule : $\theta'' + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$;
  - Charge d'un condensateur : $u' + \frac{1}{RC}u = \frac{E}{RC}$;
  - Équation logistique : $N' = aN(1 - bN)$;
  - Modèle de Solow d'accumulation du capital : $K' = sF(K, L) - \delta K$.

1.2 Équations différentielles linéaires

Définition

On dit qu'une équation différentielle est linéaire si elle est de la forme :

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y + a_0(t) = 0,$$

c'est-à-dire que y et ses dérivées apparaissent de manière linéaire dans l'équation.

Exemples :

- $y' = 2$, $y' - 2y = 0$ et $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^t$ sont des équations linéaires.
- $yy' = \sqrt{1-t}$ n'est pas linéaire.

Définition : Équation différentielle homogène

Une équation est dite homogène si elle n'a pas de second membre faisant intervenir ni y ni ses dérivées.
On obtient l'équation homogène associée à une équation différentielle en retirant le second membre.

Exemples :

- l'équation homogène associée à $y' = 2$ est $y' = 0$;
- $y' - 2y = 0$ est déjà homogène ;
- l'équation homogène associée à $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^t$ est $y'' + 2y' - 3y = 0$.

2 Équations linéaires d'ordre 1

2.1 Résolution de l'équation homogène $y' + ay = 0$

Proposition

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-at}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple : quelles sont toutes les fonctions telles que $y' = y$?
Remarque : Les solutions de $y' + ay = 0$ forme un espace vectoriel de dimension 1. L'ensemble des solutions est donc stable par combinaisons linéaires.

2.2 Résolution de l'équation $y' + ay = b(t)$

Définition : Solution particulière

Soient I un intervalle et $b : I \to \mathbb{R}$ continue.
On dit que y_0 est une solution particulière de $y' + ay = b(t)$ si y est $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$: $y'(t) + ay(t) = b(t)$.

Exemple : $t \mapsto 1$ est une solution particulière de $y' + y = 1$.

Théorème : Forme des solutions

Soient I un intervalle et $b : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit y_0 une solution particulière de $y' + ay = b(t)$.
Les solutions de $y' + ay = b(t)$ sont les fonctions de la forme $y = h + y_0$ où h est solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$.

Exemple : Déterminer les solutions de $y' + y = 1$.
Remarque : Cette technique de se ramener à l'équation homogène en utilisant une solution particulière est courante pour résoudre les problèmes de la forme « équation linéaire = second membre ». C'est par exemple ce qu'on fait pour les suites arithmético-géométriques.

Proposition : Solution particulière de $y' + ay = b$

Si $b \in \mathbb{R}$ est une constante et $a \neq 0$, une solution particulière de $y' + ay = b$ est la fonction constante $y_0 : t \mapsto \frac{b}{a}$.

Exemple : Déterminer les solutions de $y' + 3y = 12$.

Proposition : Principe de superposition

On suppose $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$.
Si y_1 est une solution particulière de $y' + ay = b_1(t)$ et y_2 est une solution particulière $y' + ay = b_2(t)$ alors $y_0 = y_1 + y_2$ est une solution particulière de : $y' + ay = b(t)$.

Exemple : Déterminer une solution particulière de $y' + y = \mathrm{e}^t + 1$.

3 Équations linéaires d'ordre 2

3.1 Résolution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$

Définition : Équation caractéristique

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée l'équation caractéristique de $y'' + ay' + by = 0$.

Proposition

- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ a deux solutions réelles r_1 et r_2 alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ a une unique solution réelle r_0 alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{r_0 t}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exemple : quelles sont toutes les fonctions telles que $y'' - y = 0$?
Remarque : Les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ forme un espace vectoriel de dimension 2. L'ensemble des solutions est donc stable par combinaisons linéaires.

3.2 Résolution de l'équation $y'' + ay' + by = c(t)$

Définition : Solution particulière

Soient I un intervalle et $c : I \to \mathbb{R}$ continue.
On dit que y_0 est une solution particulière de $y'' + ay' + by = c(t)$ si y est $\mathcal{C}^2$ sur I et pour tout $t \in I$: $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$.

Exemple : $t \mapsto 1$ est une solution particulière de $y'' - y = 1$.

Théorème : Forme des solutions

Soient I un intervalle et $b : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit y_0 une solution particulière de $y'' + ay' + by = c(t)$.
Les solutions de $y'' + ay' + by = c(t)$ sont les fonctions de la forme $y = h + y_0$ où h est solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

Exemple : Déterminer les solutions de $y'' - y = 1$.

Proposition : Solution particulière de $y'' + ay' + by = c$

Si $c \in \mathbb{R}$ est une constante et $b \neq 0$, une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$ est la fonction constante $y_0 : t \mapsto \frac{c}{b}$.

Exemple : Déterminer les solutions de $y'' - 2y' + y = 2$.

Proposition : Principe de superposition

On suppose $c(t) = c_1(t) + c_2(t)$.
Si y_1 est une solution particulière de $y'' + ay' + by = c_1(t)$ et y_2 est une solution particulière $y'' + ay' + by = c_2(t)$ alors $y_0 = y_1 + y_2$ est une solution particulière de : $y'' + ay' + by = c(t)$.

Exemple : Déterminer une solution particulière de $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{-t} + 1$.

4 Trajectoires

4.1 Généralités

Définition : Trajectoire

On appelle trajectoire d'une équation différentielle (E) sur I tout ensemble $\{(t, y(t)), t \in I\}$, où y est une solution de l'équation différentielle (E).

Remarque : une trajectoire est donc le graphe d'une solution.
Exemple : Tracer plusieurs trajectoires pour $y' + y = 0$.

Proposition

Soient $t_0 \in I$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

1. Il existe une unique solution à l'équation $y' + ay = b(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$.
2. Il existe une solution à l'équation $y'' + ay' + by = c(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$.

Remarques :

- Résoudre une équation différentielle avec condition initiale comme précédemment s'appelle résoudre un problème de Cauchy.
- Une trajectoire est donc uniquement déterminée par l'équation différentielle et une condition initiale.
- Ainsi, si deux trajectoires pour une équation d'ordre 1 se croisent en un point, alors elles sont identiques. Dit autrement, l'intersection de deux trajectoires différentes est vide.

4.2 Convergence et équilibre

Définition : Trajectoire d'équilibre

On appelle trajectoire d'équilibre toute trajectoire associée à une solution constante.

Exemples :

- La seule trajectoire d'équilibre de $y' + y = 0$ est celle de la fonction constante nulle.
- La trajectoire d'équilibre de $y' + y = 1$ est celle de la fonction constante égale à 1.

Définition : Convergence

On dit qu'une trajectoire $\{(t, y(t)), t \in I\}$ d'une équation différentielle converge si $y(t)$ admet une limite réelle (finie) lorsque t tend vers $+\infty$.

Remarques :

- Évidemment, il faut que $+\infty$ soit une borne de I et ainsi que y soit définie au voisinage de $+\infty$ pour que cela ait un sens.
- On peut prouver que, en cas de convergence, les trajectoires convergent vers une trajectoire d'équilibre.
  Vérifions-le pour $y' + ay = b$.