DM4 Appliquées - Applications linéaires

À rendre le mardi 10/12/2024

Exercice 1 - ECRICOME ECE 2019 (Exercice 1 - adapté)

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie I

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Si $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$, déduire de la question précédente que $\lambda = 0$.
   (c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
   (b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On pose :
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
   (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
   (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) En déduire que M est inversible.
   (d) À l'aide de la question 1a, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.
   (e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
   Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie II

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T.$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

4. Montrer que $VT = TV$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.
5. (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.
   (b) Montrer que $g(e'_2) - ae'_2$ appartient aussi au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = be'_1 + ae'_2$.
   (c) Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = ae'_2 + be'_1$.
   En déduire que $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2$ appartient au noyau de f.
   (d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
6. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.