DM4 Approfondies - Applications linéaires

À rendre le mardi 10/12/2024

Exercice 1 - EDHEC ECS 2016 (Exercice 2)

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f\circ(f-\mathrm{Id})^2=0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Déterminer $(f-\mathrm{Id})^2+f\circ(2\mathrm{Id}-f)$.
   (b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $x=(f-\mathrm{Id})^2(x)+(f\circ(2\mathrm{Id}-f))(x)$.
   (c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.
2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f\circ(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})=0$.
   (a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant $\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+XP(X)=1$.
   (b) En déduire que : $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.
3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p\geqslant 2$) et tel que $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.
   Indication : *on dit que P est un polynôme annulateur de f lorsque, pour $P=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_pX^p$, on a $a_0+a_1f+a_2f^2+\cdots+a_pf^p=0$.*
   (a) Montrer qu'il existe p réels $a_1,\ldots,a_p$ avec $a_1\neq 0$, tels que $P=a_1X+\cdots+a_pX^p$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.
   (c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux précédentes ?