Chapitre 11 - Réduction

1 Valeurs propres, espaces propres

1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition : Valeurs et vecteurs propres

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul**. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On dit que X est vecteur propre de A pour la valeur propre λ si :

$$AX = \lambda X.$$

Remarque : on interdit le cas $X = 0$ car on a toujours $A \times 0 = \lambda \times 0$.
Exemples :

- Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour quelle valeur propre ?
- Montrer que $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Quelle est la valeur propre associée ?
- Montrer que 1 et 2 sont valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en choisissant des vecteurs propres pertinents.
- Montrer que 2 n'est pas valeur propre de I_2.

Définition : Spectre d'une matrice

On appelle **spectre** de A et on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

Propriétés :

- λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ est non inversible.
- A est non-inversible si et seulement si $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

Proposition : Condition nécessaire pour une valeur propre

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme annulateur de A. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Alors :

$$P(\lambda) = 0.$$

Remarque : cela permet de rejeter des valeurs propres mais pas de les valider.
Exemples :

- Vérifier que $x^3 - 3x^2 + 2x$ est annulateur de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs propres possibles pour A ?
- Vérifier que $x^2 + 1$ est annulateur de $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs propres possibles pour B ?

1.2 Sous-espaces propres

Définition : Sous-espace propre

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On appelle sous-espace propre de A associée à λ :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarques :

- $E_\lambda(A)$ est l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à λ plus le vecteur nul.
- Attention ! Il faut que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ pour pouvoir parler de $E_\lambda(A)$.
- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On a $1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant n$.

Exemple : déterminer $E_0(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de A. Soit $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ des familles libres de $E_{\lambda_1}(A), \dots, E_{\lambda_p}(A)$ respectivement.
La concaténation de $\mathcal{F}$ de ces familles est une famille libre de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple : Déterminer $E_1(A)$ et $E_{-1}(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire une base de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ consistuée de vecteurs propres de A.

1.3 Détermination des éléments propres d'une matrice

Méthode : Déterminer les valeurs propres

- **Si on connaît un polynôme annulateur P :**
  1. On détermine les racines de P.
  2. Pour chacune des racines λ :
     - on vérifie que $A - \lambda I_n$ est inversible ;
     - ou on résout $AX = \lambda X$. Cette deuxième approche permet de déterminer $E_\lambda(A)$ simultanément.
- **Si on ne connaît pas de polynôme annulateur :**
  1. Si la matrice est triangulaire (ou diagonale), les valeurs propres sont les éléments diagonaux.
  2. On chercher pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, $A - \lambda I_n$ est non-inversible. Pour cela :
     - Si $n = 2$, on peut résoudre $\det(A - \lambda I_2) = 0$;
     - Si $n > 2$, on applique des opérations de Gauss sur $A - \lambda I_n$ jusqu'à obtenir une matrice triangulaire. Les valeurs de λ pertinentes sont celles qui annulent certains des coefficients diagonaux de la matrice triangulaire.

Remarques :

- Attention en appliquant les opérations de Gauss ! Il faut s'assurer qu'elles sont valides quelles que soient les valeurs de λ.
- Pour les **maths appros**, je vous recommande de calculer $\text{rg}(A - \lambda I_n)$ plutôt que juste déterminer l'inversibilité, cela permettra d'appliquer un théorème qui permet d'accélérer les calculs qui suivent.

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode : Déterminer les sous-espaces propres

Une fois les valeurs propres déterminées, il suffit pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$ de résoudre $AX = \lambda X$ d'inconnue X et de déterminer ainsi une base et la dimension de $E_\lambda(A)$.

Exemple : déterminer les sous-espaces propres de $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque :

- pour les **maths appros**, on pourra utiliser $\dim E_\lambda(A) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$.
- pour les **maths applis**, vous pouvez utiliser la formule mais il faudra la redémontrer à chaque fois...

2 Réduction des matrices carrées

2.1 Diagonalisabilité

Définition : Matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite diagonalisable si A est semblable à D diagonale.

Remarques :

- Cela signifie qu'il existe P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
- Attention, ni P ni la matrice diagonale ne sont nécessairement uniques.
- En conséquence, les colonnes de P sont des vecteurs propres de A. On peut en déduire la proposition suivante.

Proposition

A est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Méthode : Diagonaliser une matrice

Diagonaliser une matrice A c'est trouver P et D tels que $A = PDP^{-1}$.
Pour cela :

1. On cherche le spectre de A.
2. On déterminer une base de chaque espace propre de A.
3. On vérifie que la concaténation de ces bases forment une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans ce cas, les colonnes de P sont les vecteurs de bases et les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres. On veillera à mettre les vecteurs dans le même ordre que les valeurs propres.

Exemple : Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2 Théorèmes de diagonalisabilité

Proposition

Si A a n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Proposition : Théorème spectral

Si A est symétrique alors A est diagonalisable.

2.3 Applications

Calculs de puissances

Exemple : Calculer les puissances successives de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition : Binôme de Newton

Si A et B commutent alors pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Exemple : Calculer les puissances successives de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Méthode

- **Si A est diagonalisable,** on écrit $A = PDP^{-1}$ puis $A^k = (PDP^{-1})^k = \underbrace{PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1}}_{k \text{ fois}} = PD^kP^{-1}$.
- **Si A n'est pas diagonalisable,**
  1. on calcule A^2, A^3, A^4 pour faire une conjecture ;
  2. on exprime A^2 en fonction de A et I_n (ou A^3 en fonction de A^2, A et I_n) puis l'utilise dans une démonstration par récurrence.
  3. On écrit $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire. On écrit alors $T = D+N$ avec D diagonale et N de diagonale nulle et on utilise le binôme de Newton pour calculer T^k.

Exemples :

- Calculer J^n pour $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Étude du commutant

Le but est de déterminer $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Méthode

1. Diagonaliser A en écrivant $A = PDP^{-1}$.
2. Étudier le commutant de D.
3. Se ramener à A.

Exemple : commutant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Étude des suites récurrentes d'ordre 3 (ou plus)

Méthode

Si $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$ alors on peut poser $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. On a alors :

$$X_{n+1} = AX_n$$

avec $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut alors montrer que $X_n = A^n X_0$ et on se ramène au calcule des puissances de A.

Exemple : $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 0$ et $u_2 = 1$.

3 Mathématiques approfondies

3.1 Généralisation aux endomorphismes et propriétés supplémentaires

Toutes les définitions se généralisent aux endomorphismes : valeurs propres et vecteurs propres d'endomorphismes, spectre d'endomorphismes, sous-espaces propres d'endomorphismes.

Proposition

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. $E_\lambda(f)$ est stable par f.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$;
- $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif ;
- $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijectif ;
- $\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) < n$.

Dans ce cas :

$$\dim E_\lambda(f) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

Remarque : traduction sur les matrices à expliciter.

3.2 Utilisation des polynômes

Proposition

Si Q est un polynôme et $f(x) = \lambda x$ alors $Q(f)(x) = Q(\lambda)x$.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

- $(P + aQ)(f) = P(f) + aQ(f)$;
- $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$

Conséquences :

- $\mathrm{Mat}_B(P(f)) = P(\mathrm{Mat}_B(f))$;
- $P(f)$ et $Q(f)$ commutent. En particulier f et $P(f)$ commutent.

Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Tout sous-espace propre de f est stable par g. En particulier $E_\lambda(f)$ est stable par $P(f)$ pour tout P.

Théorème

Tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme annulateur non nul.

Exemples : polynôme annulateur d'un projecteur, d'une symétrie.

3.3 Somme directe de sous-espaces propres

Lemme

Soit $r \in \mathbb{N}^\star$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Il existe un unique polynôme $P_i \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, r]\!], \; P_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathrm{Sp}(f)$ des valeurs propres deux à deux distincts de f. Alors :

$$\sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f).$$

Corollaires :

- Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f possède au plus n valeurs propres.
- Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) \leq n.$$

- On peut en déduire que la concaténation de famille libre de sous-espaces propres distinctes est libre.
- Et on peut montrer que si f admet n valeurs propres distinctes alors la concaténation des bases des sous-espaces est une base de E.

3.4 Diagonalisabilité

Définition : Endomorphisme diagonalisable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Exemple : projecteurs.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit B une base de E. f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Mat}_B(f)$ est diagonalisable.

Exemple : Toute matrice vérifiant $A^2 = A$ est diagonalisable.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est diagonalisable ;
2. $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E$;
3. E est somme directe des sous-espaces propres de f ;
4. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

3.5 Transposée et similitude

Proposition

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$.
De plus, les sous-espaces propres de A et ${}^tA$ associés à une même valeur propre λ ont même dimension : $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda({}^tA)$.

Proposition

Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et ont des sous-espaces propres de même dimension.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont **pas** semblables.

Proposition

Soient A et B deux matrices **diagonalisables**. Alors A est semblable à B si et seulement si A et B ont les mêmes valeurs propres et leurs sous-espaces propres ont même dimensions.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.