Correction DM4 Appliquées - Applications linéaires

Exercice 1 - ECRICOME ECE 2019 (Exercice 1 - adapté)

Partie I

1. (a) On a :

$$\boxed{A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & -3 & -3\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.}$$

Puis :

$$\boxed{A^3 = A\times A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.}$$

(b) Soit $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$. On a alors :

$$A^3X = A^2AX = A^2\lambda X = A\lambda AX = A\lambda^2X = \lambda^2AX = \lambda^3X.$$

Or $A^3 = 0$ donc $A^3X = 0$ et ainsi $\lambda^3X = 0$.
Erreur d'énoncé : il faut supposer $X \neq 0$.
On a alors $\lambda^3 = 0$ et donc $\boxed{\lambda = 0.}$

(c) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{3}(-x+2y+z) = 0\\ \frac{1}{3}(-x-y-2z) = 0\\ \frac{1}{3}(x+y+2z) = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}-x+2y+z = 0\\ -x-y-2z = 0\\ x+y+2z = 0\end{cases}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases}-x+2y+z = 0\\ -x-y-2z = 0\\ 0 = 0\end{cases}\\
&\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases}-x+2y+z = 0\\ -3y-3z = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}-x+2y+z = 0\\ y+z = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x = -z\\ y = -z\\ z = z\end{cases}\\
&\Leftrightarrow (x,y,z) = z(-1,-1,1)\\
&\Leftrightarrow (x,y,z) \in \mathrm{Vect}((-1,-1,1))
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1,-1,1))$. Donc $\boxed{((-1,-1,1))}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme c'est une famille d'un unique vecteur non nul, elle est libre. C'est donc $\boxed{\text{une base de } \mathrm{Ker}(f).}$ Et ainsi :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1.}$$

2. (a) Montrons que (e'_1, e'_2, e'_3) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
On a donc :
$$\lambda_1(-1,-1,1) + \lambda_2(2,-1,1) + \lambda_3(-1,2,1) = (0,0,0)$$
Puis :
$$(-\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$$
On résout :
$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$
$$\begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$
Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Ainsi $\boxed{(e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est libre.}}$ Comme la famille a 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^3.}$

(b) Plusieurs méthodes sont possibles. Voici celle que je pense être la plus rapide.
On calcule avec la représentation matricielle dans la base canonique :
$$A\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&-1&-2\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$
Donc $f(e'_1) = 0$.
On calcule de même :
$$A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&-1&-2\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$
Ainsi $f(e'_2) = e'_1$.
On calcule enfin :
$$A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&-1&-2\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$
Ainsi $f(e'_3) = e'_2$.
Et donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :
$$\boxed{T = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.}$$

3. (a) Dans une combinaison linéaire $\alpha A + \beta I$, les coefficients hors-diagonaux proviennent uniquement de A. On en déduit qu'il faut fixer $\alpha = -1$. On trouve rapidement au brouillon qu'il faut alors poser $\beta = 1$. Et en effet, on a bien :
$$\boxed{-A + I = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&-1&-2\\1&1&2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+3&2&1\\1&1+3&2\\-1&-1&-2+3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&2&1\\1&4&2\\-1&-1&1\end{pmatrix} = M.}$$

(b) Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$. D'après la formule de changement de base, on a :
$$T = P^{-1}AP.$$
On a également $M' = P^{-1}MP$. Donc :
$$M' = P^{-1}(-A+I)P = -P^{-1}AP + I = -T + I.$$
D'où :
$$\boxed{M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) M' est une matrice triangulaire, sans aucun zéro sur la diagonale. Donc M' est inversible. Donc h est bijectif. Et donc $\boxed{M \text{ est inversible.}}$

(d) On a $A^3 = 0$. Or $A = I - M$. On a donc :
$$(I - M)^3 = 0.$$
Ainsi $\boxed{(M - I))^3 = 0.}$
Puis, I commute avec M (la matrice identité commute avec toute matrice), on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton. On a ainsi :
$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0.$$
Ainsi :
$$M(M^2 - 3M + 3I) = I.$$
Donc $\boxed{M^{-1} = M^2 - 3M + 3I.}$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Encore une fois, I commute avec A. On peut donc appliquer le binôme de Newton à :
$$\begin{aligned} M^n &= (-A+I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-A)^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(-A)^k}_{=0 \text{si } k \geqslant 3}. \end{aligned}$$
Donc si $n \geqslant 2$, la somme a suffisamment de termes et on a donc :
$$\boxed{M^n = \binom{n}{0}(-A)^0 + \binom{n}{1}(-A)^1 + \binom{n}{2}(-A)^2 = I - nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2.}$$
On vérifie aisément que la formule reste valide pour $n \in \{0, 1\}$.
Pour $n = -1$, la formule donne :
$$I - nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2 = I - (-1)A + \frac{(-1)(-1-1)}{2}A^2 = I + A + A^2.$$
Par ailleurs, on a :
$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I = (-A+I)^2 - 3(-A+I) + 3I = A^2 - 2A + I + 3A - 3I + 3I = A^2 + A + I.$$
Donc $\boxed{\text{la formule reste valide pour } n = -1.}$

Partie II

4. On a :
$$\boxed{VT = V \times V^2 = V^3 = V^2 \times V = TV.}$$
Comme $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g)$ et $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, on a donc :
$$\boxed{g \circ f = f \circ g.}$$

5. (a) On a :
$$f(g(e'_1)) = f \circ g(e'_1) = g \circ f(e'_1) = g(\underbrace{f(e'_1)}_{=0}) = 0.$$
Donc $\boxed{g(e'_1) \in \mathrm{Ker}(f).}$
On a $e'_1 \in \mathrm{Ker}(f)$. Or e'_1 est non nul et forme donc une famille libre. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, (e'_1) est une base de $\ker(f)$.
Ainsi, on peut décomposer $g(e'_1)$ sur cette base et donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\boxed{g(e'_1) = ae'_1.}$$

(b) Calculons :
$$f(g(e'_2) - ae'_2) = f(g(e'_2)) - af(e'_2) = g(f(e'_2)) - af(e'_2) = g(e'_1) - ae'_1 = ae'_1 - ae'_1 = 0.$$
Donc $\boxed{g(e'_2) - ae'_2 \in \mathrm{Ker}(f).}$
En décomposant sur la base (e'_1) de $\mathrm{Ker}(f)$, on trouve qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :
$$g(e'_2) - ae'_2 = be'_1.$$
Ainsi $\boxed{g(e'_2) = ae'_2 + be'_1.}$

(c) On a :
$$\boxed{f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = g(e'_2) = ae'_2 + be'_1.}$$
Ainsi :
$$f(g(e'_3) - ae'_3 - be'_2) = ae'_2 + be'_1 - af(e'_3) - bf(e'_2) = ae'_2 + be'_1 - ae'_2 - be'_1 = 0.$$
Et donc $\boxed{g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 \in \mathrm{Ker}(f).}$

(d) En décomposant le résultat précédent sur la base (e'_1) de $\mathrm{Ker}(f)$, on trouve qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :
$$g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 = ce'_1.$$
Ainsi $\boxed{g(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1.}$
On en déduit que la matrice V de g dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) est :
$$\boxed{V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.}$$

6. On a :
$$V^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$
Comme $V^2 = T$, on en déduit :
$$\begin{cases} a^2 &= 0 \\ 2ab &= 1 \\ b^2 + 2ac &= 0 \end{cases}$$
La première ligne implique $a = 0$. Puis en réinjectant dans la deuxième ligne, on obtient :
$$\boxed{0 = 1}$$
$\boxed{\text{ce qui est absurde.}}$
Ainsi $\boxed{\text{il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ tel que } g \circ g = f.}$