

CORRECTION DM4 APPROFONDIES - APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1 - EDHEC ECS 2016 (Exercice 2)

1. (a) On a :

$$(f - \text{Id})^2 + f \circ (2\text{Id} - f) = f^2 - 2f + \text{Id} + 2f - f^2 = \text{Id.}$$

(car f et Id commutent)

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a donc $(f - \text{Id})^2(x) + (f \circ (2\text{Id} - f))(x) = \text{Id}(x) = x.$

(c) Le résultat permet de montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$x = (f - \text{Id})^2(x) + (f \circ (2\text{Id} - f))(x).$$

Or $(f \circ (2\text{Id} - f))(x) = f((2\text{Id} - f)(x)) \in \text{Im}(f)$ par définition. De plus, on a :

$$f((f - \text{Id})^2(x)) = (f \circ (f - \text{Id})^2)(x) = 0.$$

Donc $(f - \text{Id})^2(x) \in \text{Ker}(f)$. Ainsi, on peut écrire :

$$x = \underbrace{(f - \text{Id})^2(x)}_{\in \text{Ker}(f)} + \underbrace{(f \circ (2\text{Id} - f))(x)}_{\in \text{Im}(f)}.$$

Donc on a bien $x \in \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$ et donc $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f).$

Il reste à prouver que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe. Faisons-le par un calcul sur les dimensions.

On a :

$$\dim(\text{Ker}(f) + \text{Im}(f)) = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) - \dim \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f).$$

Or $\dim(\text{Ker}(f) + \text{Im}(f)) = \dim \mathbb{R}^n = n$. De plus, d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Donc nécessairement :

$$\dim \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = 0.$$

Cela implique que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et donc que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe.

Donc finalement $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f).$

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. On écrira $P = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(X^2 - 5X + 4) + X(aX + b) &= 1 \\ \Leftrightarrow X^2 - 5X + 4 + 4aX^2 + 4bX &= 4 \\ \Leftrightarrow (4a+1)X^2 + (4b-5)X &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+1 &= 0 \\ 4b-5 &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -\frac{1}{4} \\ b &= \frac{5}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $P = -\frac{1}{4}X + \frac{5}{4}$ est l'unique polynôme de degré 1 tel que :

$$\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1$$

(b) Comme f et Id commutent, on peut faire les mêmes calculs en remplaçant X par f . On trouve alors :

$$\frac{1}{4}(f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}) + f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\text{Id}\right) = \text{Id}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = \frac{1}{4}((f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}))(x) + (f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\text{Id}\right))(x).$$

Comme dans la première question, on peut alors remarquer que :

$$(f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\text{Id}\right))(x) = f\left(\left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\text{Id}\right)(x)\right) \in \text{Im}(f)$$

et : $f\left(\frac{1}{4}((f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}))(x)\right) = \frac{1}{4}f \circ (f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id})(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc $\frac{1}{4}((f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}))(x) \in \text{Ker}(f)$. D'où :

$$x = \underbrace{\frac{1}{4}((f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}))(x)}_{\in \text{Ker}(f)} + \underbrace{(f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\text{Id}\right))(x)}_{\in \text{Im}(f)}.$$

Ainsi, on a $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.

Il reste à prouver que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe. On procède exactement comme dans la question 1 :

$$\dim \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \underbrace{\dim(\text{Ker}(f) + \text{Im}(f))}_{=n} - \underbrace{(\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f))}_{=n} = 0.$$

D'où $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

3. (a) Comme P est de degré p , il existe $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tel que $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_pX^p$ où $a_p \neq 0$. On a $P(0) = 0$. Donc :

$$\underbrace{a_0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0^2 + \dots + a_p \times 0^p}_{=a_0} = 0.$$

Donc $P = a_1X + a_2X^2 + \dots + a_pX^p$.

De plus $P'(X) = a_1 + 2a_2X + \dots + pa_pX^{p-1}$. Donc $P'(0) = a_1$. Et comme $P'(0) \neq 0$, on a : $a_1 \neq 0$.

Donc il existe bien $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ avec $a_1 \neq 0$ (et même $a_p \neq 0$) tel que $P = a_1X + a_2X^2 + \dots + a_pX^p$.

- (b) Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Montrons que $x = 0$.

Comme $x \in \text{Im}(f)$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$, tel que $x = f(y)$. Comme P est un polynôme annulateur de f , on a :

$$a_1f(y) + a_2(f \circ f)(y) + \dots + a_pf^p(y) = 0$$

que l'on peut réécrire dans ce contexte : $a_1x + a_2f(x) + \dots + a_pf^{p-1}(x) = 0$.

Or $x \in \text{Ker}(f)$. Donc $f(x) = \dots = f^{p-1}(x) = 0$ puis :

$$a_1x = 0.$$

Et comme $a_1 \neq 0$, on a finalement $x = 0$.

Donc $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont en somme directe.

De plus, d'après le théorème du rang, on a : $\dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^n$. Et ainsi, par égalité des dimensions, on a :

$$\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^n.$$

- (c) Les deux questions précédentes sont l'application de cette question avec $P = X(X-1)^2$ et $P = X(X-1)(X-4)$ respectivement. On a bien dans chaque cas que ce sont des polynômes annulateurs de degré au moins 2, avec $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.