DM5 - Réduction

À rendre le vendredi 20/12/2024

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques **Python** *sont importées comme suit :*

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al
```

Exercice 1 - EDHEC ECE 2022 (Exercice 1 - adapté)

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que (K_1, K_2, K_3, K_4) est la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère l'application φ qui, à toute matrice M de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$\varphi(M) = JM - MJ.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Exprimer $\varphi(K_1)$, $\varphi(K_2)$, $\varphi(K_3)$ et $\varphi(K_4)$ comme combinaisons linéaires de K_1, K_2, K_3 et K_4.
   (b) Expliciter comment est construite la matrice A de φ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4) puis expliciter A.
   (c) A est-elle diagonalisable ?
3. (a) Déterminer le rang de A puis donner une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, puis montrer que (I, J) est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. (a) Calculer A^2 puis montrer que $A^3 - 4A = 0$.
   (b) En déduire les valeurs propres possibles pour φ.
5. En `Python`, la commande `r = al.rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice `M`. On a saisi :

```python
A = np.array([[0,-1,1,0],[-1,0,0,1],[1,0,0,-1],[0,1,-1,0]])
r1 = al.rank(A - 2*np.eye(4))
r2 = al.rank(A + 2*np.eye(4))
print("r1 =", r1)
print("r2 =", r2)
```

   Et on a obtenu l'affichage :

```
r1 = 3
r2 = 3
```

   Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres non nulles de φ et à la dimension des sous-espaces propres associées ?
6. (a) Résoudre les systèmes $AX = 2X$ et $AX = -2X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer le spectre de A ainsi que les sous-espaces propres de A.