Chapitre 12 - Fonctions de deux variables

1 Généralités sur les fonctions de deux variables

1.1 Définition

Définition : Fonctions de deux variables

On appelle fonction réelle de deux variables réelles toute application f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

Remarque : les fonctions réelles de deux variables réelles peuvent ne pas être définies sur $\mathbb{R}^2$ entier. Nous y reviendrons dans un chapitre futur.

Exemples :

- Les fonctions coordonnées $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$.
- La fonction « distance à $(0,0)$ » $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$.
- Les fonctions polynomiales $(x,y) \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$.
- Fonction de production de Cobb-Douglas : $P(L,K) = \beta L^\alpha K^{1-\alpha}$ (avec hypothèse de rendement constant).
- Fonctions plus compliquées, comme $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{xy} - \mathrm{e}^x + y^2$.

1.2 Représentation graphique

Définition : Graphe

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le graphe de f est : $\mathcal{S}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$.

Remarque : le graphe d'une fonction à deux variables est une surface plongée dans un espace à 3 dimensions.

Définition : Applications partielles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors :

- pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, $f_y : x \mapsto f(x,y)$ est la première application partielle de f ;
- pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est la seconde application partielle de f.

Remarque : graphiquement, cela revient à faire des coupes parallèles à l'axe des abscisses ou des ordonnées du graphe de f.
Exemple : avec $f : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Définition : Ligne de niveau

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau** λ l'ensemble des points :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \lambda\}.$$

Remarque : C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Les lignes de niveaux se représentent donc dans le plan, dans l'espace de départ de f.
Exemple : avec $f : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ et $\lambda \in \{1, 1/\mathrm{e}, -1\}$.

2 Continuité

Définition : Distance euclidienne entre deux points

Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B). La distance euclidienne entre A et B est :

$$d(A,B) = AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Remarque : cela vient du théorème de Pythagore.

Définition : Continuité d'une fonction sur $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est continue en (x_0, y_0) lorsque :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d((x,y),(x_0,y_0)) \leqslant r \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leqslant \epsilon.$$

Remarque : on dit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (ou de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$) si f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exemple : $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$. (on montrera que $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$)

Propriétés :

- Les fonctions coordonnées $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
- Les sommes, combinaisons linéaires, produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ sont continus sur $\mathbb{R}^2$.

- Le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ est continue en tout point où le dénominateur est non nul.
- Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans I et si $g : I \to \mathbb{R}$ est continue alors $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemples : Vérifier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de :

- $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - xy^3$;
- $g : (x, y) \mapsto \frac{x+2y+xy^2}{x^2+y^2+1}$;
- $h : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$;
- $\ell : (x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$;
- $m : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$;
- $n : (x, y) \mapsto \max(x, y)$ en remarquant que $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

Remarque : Attention ! La continuité ne peut pas s'étudier variable par variable. La continuité des fonctions partielles n'est pas suffisante pour avoir la continuité de la fonction.

3 Calcul différentiel

3.1 Calcul différentiel d'ordre 1

Définition : Dérivée partielle

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f_y est dérivable en x, alors on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x en (x, y). On note :

$$\partial_1(f)(x, y) = f_y'(x).$$

Remarque : On définit de même $\partial_2(f)$.
Exemples :

- $f : (x, y) \mapsto 3x + y$.
- $g : (x, y) \mapsto 2x^2 + 3xy - y$.
- $h : (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{x^2-y^2}$.

Définition : Gradient

On appelle gradient de f en (x, y) le vecteur de $\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y) \\ \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Exemple : gradient de $(x, y) \mapsto x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$ en tout point. **Remarque :** le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

Définition : Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Si f admet ses deux dérivées partielles $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ en tout point et que ces dérivées sont toutes deux $\mathcal{C}^0$ alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque : Les règles de calculs pour la classe $\mathcal{C}^0$ s'appliquent de la même manière (fonctions polynômes, somme, produit, quotient, composition).

Proposition

Si f est $\mathcal{C}^1$ alors f est $\mathcal{C}^0$.

Remarque : la simple dérivabilité ne suffit pas pour montrer qu'une fonction est $\mathcal{C}^0$!

Proposition : Développement limité à l'ordre 1

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + {}^t\nabla f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2}\epsilon(h, k)$$

où $\epsilon(0, 0) = 0$ et ϵ est continue en $(0, 0)$.

Remarque : le développement limité à l'ordre 1 est unique. On peut donc en identifier les coefficients lorsqu'on en a deux écritures.
Exemple : Si $f(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ alors $\partial_1 f(0, 0) = 1$ et $\partial_2 f(0, 0) = 1$.

3.2 Calcul différentiel d'ordre 2

Définition : Dérivée partielle d'ordre 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point. Si $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ admettent des dérivées partielles, on les appelles dérivées partielles d'ordre 2 de f. On note :

$$\partial_{1,1}^2 f = \partial_1(\partial_1 f), \quad \partial_{1,2}^2 f = \partial_1(\partial_2 f), \quad \partial_{2,1}^2 f = \partial_2(\partial_1 f) \quad \text{et} \quad \partial_{2,2}^2 f = \partial_2(\partial_2 f).$$

Exemples :

- $f : (x, y) \mapsto 3x + y$.
- $g : (x, y) \mapsto 2x^2 + 3xy - y$.

- $h : (x, y) \mapsto e^{x^2-y^2}$.

Définition : Matrice hessienne

On appelle hessienne de f en (x, y) la matrice de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x, y) & \partial^2_{1,2} f(x, y) \\ \partial^2_{2,1} f(x, y) & \partial^2_{2,2} f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Exemple : matrice hessienne de $(x, y) \mapsto x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$ en tout point.

Définition : Fonction de classe $\mathcal{C}^2$

Si f admet ses quatre dérivées partielles d'ordre 2 en tout point et que ces dérivées sont toutes quatre $\mathcal{C}^0$ alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Remarque : Les règles de calculs pour les classes $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ s'appliquent de la même manière (fonctions polynômes, somme, produit, quotient, composition).

Proposition

Si f est $\mathcal{C}^2$ alors f est $\mathcal{C}^1$.

Remarque : la simple double dérivabilité ne suffit pas pour montrer qu'une fonction est $\mathcal{C}^1$!

Proposition : Théorème de Schwarz

Si f est $\mathcal{C}^2$ alors $\partial^2_{1,2} f(x, y) = \partial^2_{2,1} f(x, y)$.

Remarque : la matrice hessienne d'une fonction $\mathcal{C}^2$ est symétrique.

4 Recherche d'extrema

4.1 Définitions

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) global en $a \in \mathbb{R}^2$ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ f(x) \leq f(a) \text{ (resp. } f(x) \geq f(a)).$$

Dans ce cas, on dit que $f(a)$ est le maximum (resp. le minimum) de f sur $\mathbb{R}^n$.

Exemples :

- Minimum de $f(x, y) = x^2 + y^4$
- Minimum et maximum de $g(x, y) = \sin(x)\sin(y)$
- Pas d'extrema globaux pour $h(x, y) = x^2 - 2y^2$.

Définition : Extrema locaux

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f atteint un maximum (resp. minimum) local en $a \in \mathbb{R}^2$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ d(x, a) \leqslant r \Rightarrow f(x) \leq f(a) \text{ (resp. } \geq)$$

Exemple : Maximum local de $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)$.

4.2 Condition nécessaire

Proposition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si f admet un extremum local en $a \in \mathbb{R}^2$ alors $\nabla f(a) = 0$ c'est-à-dire :

$$\partial_1 f(a) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(a) = 0.$$

Définition

Un point $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(a) = 0$ est appelé point critique de f.

Remarques :

- Tout extremum est donc un point critique.
- Le théorème est l'analogue direct du cas des fonctions à 1 variables réelle.
- Comme dans le cas des fonctions à une variable, la réciproque est fausse.
- C'est même pire que pour 1 variable... Pour 1 variable, les points critiques sont soit des extrema, soit des points d'inflexions. Pour le cas à 2 variables, c'est compliqué...

5 Mathématiques approfondies

5.1 Fonctions de n variables

$\mathbb{R}^n$ est supposé muni du produit scalaire canonique.

Définition : Fonctions numériques de n variables

On appelle fonction numérique de n variables réelles toute application f définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right. .$$

Exemple : $f(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \frac{e^{x+y-2z}}{x^2+y^2+z^2} & \text{sinon} \end{cases}$

Définition : Graphe

Le graphe de f est : $\mathcal{S}_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$.

Définition : Ligne de niveau

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau** λ :

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = \lambda\}.$$

5.2 Continuité, dérivabilité

Définition : Fonction continue sur $\mathbb{R}^n$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue en $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si pour tout point $a \in \mathbb{R}^n$, f est continue en a.

Définition : Fonctions partielles

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. La $i^{\text{ème}}$ fonction partielle de f en a est la fonction $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Remarque : Si f est continue, ses fonctions partielles sont continues.

Définition : Fonctions partielles

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. La $i^{\text{ème}}$ fonction partielle de f en a est la fonction $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Remarque : Si f est continue, ses fonctions partielles sont continues.

Définition : Gradient

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, f admette une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle en a.
On appelle gradient de f en a et on note $\nabla f(a)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)).$$

Théorème : Formule de Taylor à l'ordre 1

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$.
Alors il existe une fonction $\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant $\epsilon(0) = 0$ telle que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \|h\| \epsilon(h).$$

On peut aussi l'écrire :

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a_1, \dots, a_n) + \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}\, \epsilon(h_1, \dots, h_n).$$

Définition

Soient x et $u \in \mathbb{R}^n$ avec $u \neq 0$. Alors la droite passant par x et de direction u est $\{x + tu,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Proposition

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et soient $a, u \in \mathbb{R}^n$. Alors la fonction d'une variable $g : t \mapsto g(a + tu)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \langle \nabla f(a + tu), u\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i f(a + tu).$$

Remarques :

- En particulier, $g'(0) = \langle \nabla f(a), u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) u_i$.
- Soit u unitaire. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

  $$|\langle \nabla f(a), u\rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|u\| = \|\nabla f(a)\|.$$

  De plus, il y a égalité si et seulement si $\nabla f(a)$ et u sont colinéaires. Donc la variation la plus grande est dans la direction du gradient. Dit encore autrement, le gradient donne la direction avec le plus de variations pour la fonction f.