

CHAPITRE A2 - GRAPHS

1 Généralités

1.1 Définitions et vocabulaire

Définition : Graphe non-orienté

Un graphe G non-orienté est la donnée :

- d'un ensemble S de points appelés **sommets** ;
- d'un ensemble A d'**arêtes**. Chaque arête est reliée par ses extrémités à des sommets.

Vocabulaire :

- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- Si les extrémités d'une arête sont confondues, on dit que l'arête est une **boucle**.
- Deux arêtes peuvent avoir les mêmes extrémités. On dit qu'elles sont **parallèles**.
- Un graphe ne possédant pas d'arêtes parallèles est dit **simple**.
- Le nombre de sommets d'un graphe est appelé son **ordre**.
- Le nombre d'extrémités d'arêtes arrivant sur un sommet est appelé le **degré** du sommet. Une boucle sur un sommet augmente donc son degré de 2.
- Un sommet est dit **pair** (resp. **impair**) si son degré est pair (resp. impair).
- Un graphe simple est dit **complet** si tous ses sommets sont adjacents.

Définition : Graphe orienté

On dit qu'un graphe est **orienté** si chaque arête est orientée, c'est-à-dire si l'arête a un sens avec un sommet de départ et un sommet d'arrivée.

Dans ce cas, on représente les arêtes par des flèches.

1.2 Formules élémentaires

Proposition : Formule d'Euler (formule des poignées de main)

On considère un graphe d'ordre n ayant p arêtes. Notons d_i le degré du $i^{\text{ème}}$ sommet. Alors :

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2p.$$

Remarque : à savoir justifier.

Corollaire

Le nombre de sommets impairs est toujours pair.

2 Chaînes et types de graphes

2.1 Définitions

Définition : Chaîne

On appelle **chaîne** toute liste alternée de sommets et d'arêtes, telle que chaque arête ait pour extrémité les sommets précédent et suivant.

Remarque : Si un graphe est simple, il suffit de donner une liste de sommets pour définir une chaîne.

Vocabulaire :

- La **longueur** de la chaîne est le nombre d'arête par laquelle elle passe.
- Une chaîne est dite **fermée** lorsque le sommet initial coïncide avec le sommet final.
- Une chaîne fermée est appelé un **cycle** si chaque arête de la chaîne est parcourue une seule fois.

2.2 Graphe connexe, graphe eulérien

Définition : Graphe connexe

Un graphe est dit **connexe** si toutes les paires de sommets sont reliées par une chaîne.

Remarques :

- La **distance** entre deux sommets s et s' est la longueur de la plus petite chaîne les reliant.
- Le **diamètre** d'un graphe connexe est la plus grande distance entre ses sommets.

Définition : Chaîne eulérienne

Une chaîne est dite **eulérienne** si elle parcourt une et une seule fois toutes les arêtes du graphe.

Remarque : Si une chaîne eulérienne qui est fermée est alors un cycle. On parle de **cycle eulérien**.

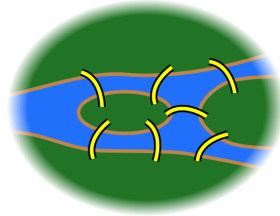
Définition : Graphe eulérien

Un graphe est dit **eulérien** s'il contient au moins un cycle **eulérien**.

Exemples :

- Les polygones convexes sont des graphes eulériens.

- (contre-exemple) Sept ponts de Königsberg.

**Théorème : Théorème d'Euler**

Soit G un graphe connexe.

- G possède une chaîne eulérienne entre deux sommets distincts si et seulement si ces deux sommets sont les seuls à avoir un degré impair.
- G est un graphe eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Remarque : S'il n'y a pas de sommet impair, alors il y a un cycle eulérien. Il n'est pas possible d'avoir un seul sommet impair (cf formule d'Euler). S'il y a deux sommets impairs, alors il y a une chaîne eulérienne reliant ces deux sommets. Il n'y a plus ni chaîne ni cycle eulérien s'il y a plus de deux sommets impairs.

Exemple : étudier les sept ponts de Königsberg.

3 Graphes et matrices

3.1 Matrice d'adjacence

Définition : Matrice d'adjacence

Soit G un graphe non-orienté dont les sommets sont numérotés de 1 à n . On appelle **matrice d'adjacence** du graphe la matrice $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j}$ est le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j .

Remarques :

- La matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n .
- Si la graphe n'a pas de boucles, alors la diagonale de la matrice d'adjacence est nulle.

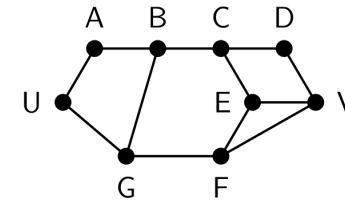
- La matrice d'adjacence d'un graphe simple n'a que des 1 ou des 0.
- La matrice d'adjacence d'un graphe simple et complet n'a que des 1.
- Si G est non-orienté alors sa matrice d'adjacence est symétrique.
- Si G est orienté, on peut généraliser la notion en posant $a_{i,j}$ égal au nombre d'arêtes partant de i et arrivant en j .

3.2 Puissances de la matrice d'adjacence

Proposition

Soit G un graphe et soit A sa matrice d'adjacence. Le nombre de chaînes de longueur k joignant le sommet i au sommet j est donné par le coefficient (i,j) de A^k .

Exemple : Combien y a-t-il de chaînes de longueur 5 reliant U à V ?

**Remarques :**

- Le coefficient (i,j) de $A^k + A^{k'}$ est le nombre de chaînes de longueur k ou k' joignant le sommet i au sommet j .
- Le coefficient (i,j) de $I + A + A^2 + \dots + A^k$ est le nombre de chaînes de longueur au plus k joignant le sommet i au sommet j .

Proposition

G est connexe si et seulement si $I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

4 Graphes et réseaux sociaux

4.1 Contexte

Un réseau social peut-être modélisé par un graphe. Chaque sommet représente un membre du réseau et les arêtes représentent les relations entre eux.

Exemples :

- Un réseau comme **Facebook** est symétrique : si je suis ton ami alors tu es mon ami. On pourra le modéliser par un graphe non-orienté où deux sommets sont reliés par une arête si les deux membres correspondants sont amis l'un de l'autre.
- Un réseau comme **Twitter** ou **Youtube** est asymétrique : on peut suivre sans être suivi en retour. On pourra modéliser un tel réseau par un graphe orienté.
- On peut modéliser les réseaux plus complexes avec d'autres types de graphes. Par exemple sur **reddit**, les membres rejoignent des communautés appelées **subreddit**. On a donc deux types de sommets. On peut modéliser cela par des graphes **colorés** où les sommets portent une couleur pour indiquer que ce sont des membres ou des communautés.

4.2 Centralité**Définition**

Soit G un graphe non-orienté d'ordre n . On note d_i le degré du sommet i . On appelle **degré de centralité** du $i^{\text{ème}}$ sommet la quantité $\frac{d_i}{n-1}$.

Remarques :

- Le degré de centralité est un nombre compris entre 0 et 1.
- C'est une mesure de l'importance du sommet en terme d'interconnexions directes.
- Si le graphe est orienté, on peut définir deux degrés de centralité : le degré entrant et sortant.

4.3 Intermédierité**Définition**

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$. Pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ notons $n_{i,j}$ le nombre total de plus courts chemins entre le $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ sommets et $n_{i,j}(k)$ le nombre total de plus court chemins du sommet i au sommet j passant par le sommet k .

On appelle **degré d'intermédierité** du sommet k la quantité $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{n_{i,j}(k)}{n_{i,j}}$.

Remarque : le degré d'intermédierité est donc la somme des fréquences d'apparition du sommet comme sommet intermédiaire dans les chemins les plus courts. Plus ce nombre est grand, plus le sommet intervient dans les interconnexions entre les autres sommets.

5 Graphe pondéré et algorithme de Dijkstra**Définition : Graphe pondéré**

Un graphe est dit **pondéré** si chaque arête est pondérée, c'est-à-dire si un nombre réel est associée à chaque arête.

Méthode : Algorithme de Dijkstra

L'algorithme de Dijkstra est un algorithme de recherche de chemin le plus court entre deux sommets d'un graphe qui prend en compte les pondérations des arêtes. L'algorithme fonctionne par itérations. À chaque itération :

- On choisit le sommet dont la distance la plus courte connue au sommet de départ est la plus courte de tous les sommets.
- On marque cette distance comme définitive et on met à jour dans un tableau, les distances les plus courtes connues en considérant pour tous les sommets adjacents au sommet choisi.
- Si on trouve ainsi un meilleur chemin, on met également à jour le sommet précédent dans le nouveau chemin.

L'algorithme s'arrête lorsque la distance au somemt d'arrivée est marquée définitive.

Exemple :