CORRECTION DM5 - RÉDUCTION

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques **Python** *sont importées comme suit :*

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
```

Exercice 1 - EDHEC ECE 2022 (Exercice 1 - adapté)

1. Pour tout $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $JM - MJ$ appartient à $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\varphi \text{ est une application de } \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).}$
   De plus pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $N \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(M+\lambda N) & = & J(M+\lambda N)-(M+\lambda N)J \\ & = & JM+\lambda JN - MJ - \lambda NJ \\ & = & (JM-MJ)+\lambda(JN-NJ) \\ & = & \boxed{\varphi(M)+\lambda\varphi(N).} \end{array}$$

   Donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire et donc est un endomorphisme de } \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).}$

2. (a) Calculons :

$$\varphi(K_1) = JK_1 - K_1J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-K_2+K_3.}$$

   On obtient de même :

$$\boxed{\varphi(K_2) = -K_1+K_4, \quad \varphi(K_3) = K_1 - K_4 \quad \text{et} \quad \varphi(K_4) = K_2 - K_3.}$$

   (b) Les colonnes de A contiennent les coordonnées des images de K_1 à K_4 dans la base $(K_1, \ldots, K_4)$.
   On a donc :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

   (c) $\boxed{A \text{ est symétrique donc diagonalisable.}}$

3. (a) Si on note C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de A, on a :

$$C_3 = -C_2 \quad \text{et} \quad C_4 = -C_1.$$

   Donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$.
   De plus, C_1 et C_2 sont clairement non-colinéaires. Donc :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$$

   En outre, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(\varphi) & = & \mathrm{Vect}(\varphi(K_1), \varphi(K_2), \varphi(K_3), \varphi(K_4)) \\ & = & \mathrm{Vect}(-K_2+K_3, -K_1+K_4, K_1-K_4, K_2-K_3) \\ & = & \mathrm{Vect}(-K_2+K_3, -K_1+K_4) \end{array}$$

   où l'on a retiré les vecteurs égaux aux signes près. Donc $(-K_2+K_3, -K_1+K_4)$ engendre $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   Comme $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 2 = \mathrm{Card}((-K_2+K_3, -K_1+K_4))$, $\boxed{(-K_2+K_3, -K_1+K_4) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(\varphi).}$

(b) D'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\mathrm{rg}(\varphi)}_{=2} + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \underbrace{\dim(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}))}_{=2\times 2=4}.$$

Donc :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 2.}$$

On vérifie aisément que :

$$\varphi(I) = JI - IJ = J - J = 0$$

et :

$$\varphi(J) = J^2 - J^2 0.$$

Donc $\{I, J\} \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.
(I, J) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est donc libre. Par considération sur les dimensions, $\boxed{\text{c'est une base de } \mathrm{Ker}(\varphi).}$

4. (a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Puis :

$$\begin{aligned} A^3 - 4A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

(b) Ainsi $x^3 - 4x$ est annulateur de A. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)x = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 0, 2\}.$$

Donc $\boxed{\text{les seules valeurs propres } \textit{possibles} \text{ pour } A \text{ sont } -2,\ 0 \text{ et } 2.}$ Dit autrement :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{-2, 0, 2\}.}$$

5. D'après le résultat du code `Python`, on a :

$$\mathrm{rg}(A - 2I_4) = 3 \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(A + 2I_4) = 3.$$

Or 2 est valeur propre si et seulement si $A - 2I_4$ est non-inversible. Comme $3 < 4$, on peut donc conjecturer que 2 est valeur propre de A.
De même, on peut conjecturer que -2 est valeur propre.
De plus, d'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\mathrm{rg}(\varphi - 2\mathrm{Id})}_{=\mathrm{rg}(A-2I_4)} + \dim \mathrm{Ker}(\varphi - 2\mathrm{Id}) = 4.$$

Donc on peut conjecturer que $\dim \mathrm{Ker}(\varphi - 2\mathrm{Id}) = 1$. Or en représentation matricielle les éléments de $\mathrm{Ker}(\varphi - 2\mathrm{Id}$ vérifient :

$$AX - 2X = 0.$$

Donc on peut conjecturer que $\dim E_2(A) = 1$.
De même, on peut conjecturer que $\dim E_{-2}(A) = 1$.

6. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AX = 2X \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y + z = 2x \\ -x + t = 2y \\ x - t = 2z \\ y - z = 2t \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases} \\
& \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} x - 2z - t = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ -2x - y + z = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases} \\
& \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + 2L_1}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} x - 2z - t = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ -y - 3z - 2t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases} \\
& \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \\ -y - 3z - 2t = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \\
& \underset{\substack{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftrightarrow L_4 + 2L_2}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \\ -4z - 4t = 0 \\ -4z - 4t = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \boxed{X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}
\end{aligned}$$

On résout de même :

$$\boxed{AX = -2X \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

(b) D'après ce qui précède, 2 et -2 sont bien valeurs propres de φ. De plus comme $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est non trivial, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = 0$ et donc 0 est également valeur propre.

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 2\}.}$$

De plus, on a d'après les calculs précédents :

$$\boxed{E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).}$$

Et comme $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(I, J)$, on en déduit :

$$\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right).}$$

puis que $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ est la matrice représentative de I et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ celle de J.